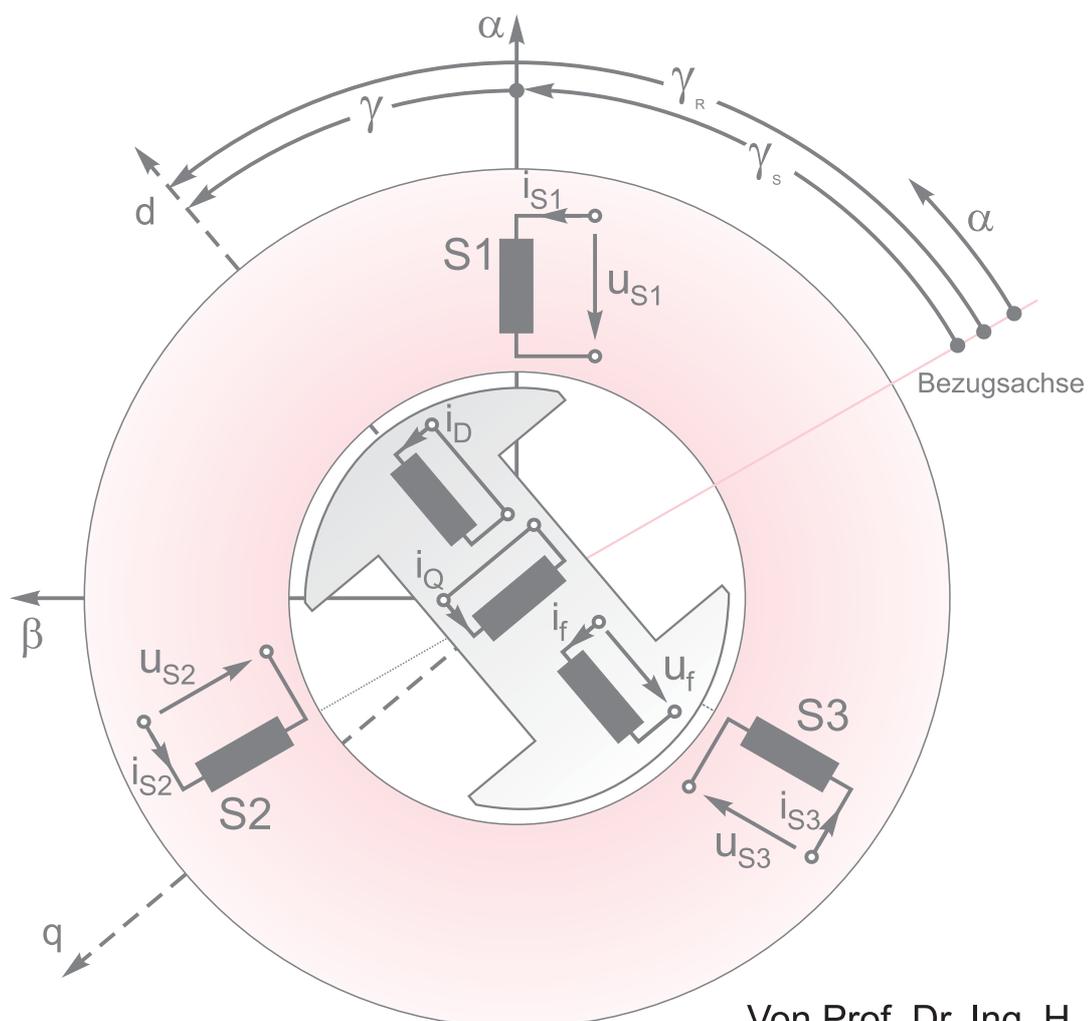


Skriptum zur Vorlesung

# Systemanalyse und Betriebsverhalten der Drehstrommaschinen



Von Prof. Dr. Ing. H. Späth  
und Dr.-Ing. H. Vogelmann

# **Vorwort**

Karlsruhe im Mai 2002

Heinrich Vogelmann



# Inhaltsverzeichnis

1	Drehstrommaschinen.....	1.1
1.1	Anwendungen von Drehstrommaschinen .....	1.1
1.2	Wicklungen von Drehstrommaschinen .....	1.4
1.3	Bezeichnung von Wicklungsteilen.....	1.4
1.4	Verkopplung von Wicklungen .....	1.6
1.5	Mechanischer und elektrischer Winkel .....	1.6
1.6	Drehmoment allgemein .....	1.8
2	Berechnung von Luftspaltinduktivitäten.....	2.1
2.1	Voraussetzungen .....	2.1
2.2	Vorgehensweise .....	2.1
2.3	Zweispulenmodell .....	2.1
2.3.1	Andere Herleitung für den Strombelag .....	2.5
2.3.2	Beispiel für einen Strombelagsimpuls.....	2.6
2.4	Fourier-Reihe einer Rechteckfunktion .....	2.10
2.4.1	Resolver als Beispiel zum Zweispulenmodell .....	2.12
2.5	Luftspaltinduktivitäten bei Drehstromwicklungen.....	2.14
2.5.1	Einschicht Drehstromwicklung .....	2.14
2.6	Zweischicht Drehstromwicklung .....	2.15
2.6.1	Ungesehnte Zweischichtwicklung.....	2.16
2.6.2	Gesehnte Zweischichtwicklung.....	2.17
2.6.3	Beispiel zur Zweischichtwicklung .....	2.19
2.6.4	Definition der wirksamen Windungszahl.....	2.23
2.7	Wechselinduktivität zwischen zwei Strängen .....	2.24
2.8	Nutschrägung .....	2.25
3	Systemgleichungen.....	3.1
3.1	Systemgleichungen der Drehstromasynchronmaschine mit Schleifringläufer .....	3.1

---

3.1.1	Induktivitätsmatrix $L_{SS}$ .....	3.2
3.1.2	Induktivitätsmatrix $L_{SR}$ .....	3.2
3.1.3	Induktivitätsmatrix $L_{RR}$ .....	3.3
3.1.4	Stirn- und Nutfeldinduktivitäten.....	3.3
3.1.5	Widerstandsmatrizen.....	3.3
3.2	Lösbarkeit des Gleichungssystems.....	3.4
3.3	Begründung für Variablentransformation.....	3.4
4	Leistungsvariante Transformation.....	4.1
4.1	Leistungsvariante Transformation allgemein.....	4.1
4.2	Leistungsvarianz.....	4.1
4.3	Transformiertes Spannungsgleichungssystem.....	4.2
4.4	Transformation auf Diagonalform.....	4.3
4.4.1	Symmetrisch:.....	4.4
4.4.2	Anwendung auf Induktivitätsmatrix und die Variablen.....	4.5
4.5	Eigenwertproblem der Transformation.....	4.5
4.5.2	Normierung des Eigenvektors mit der Euklidischen Norm.....	4.8
4.5.3	Beispiel zu den Eigenwerten.....	4.9
4.6	<u>Berechnung von <math>(L)</math></u> .....	4.10
4.6.1	Element $\boxed{33}$ ist.....	4.11
4.7	Nachtrag zu der Transformation der Induktivitäten:.....	4.14
4.8	Transformierte Widerstandsmatrix.....	4.15
4.9	<u>Berechnung der Koeffizientenmatrizen <math>(F)</math>; <math>(L)</math> und <math>(R)</math></u> .....	4.15
4.9.1	<u>Berechnung von <math>(F)</math></u> .....	4.15
4.9.2	Berechnung von $(L)$ .....	4.16
4.9.3	Berechnung von $(R)$ .....	4.16
Equation Section 1	Induktivitäten Drehstrom.....	7.1
7.1	Deutung der transformierten Spannungen; Ströme.....	7.1
7.1.1	Einheitsvektoren in der komplexen Ebene.....	7.3
7.2	Beispiel:.....	7.8
7	Rücktransformation.....	7.1
7.1	Drehmomentengleichungen.....	7.1
8	Speisung der Drehstromasynchronmaschine mit nichtsinusförmigem Spannungs- und Stromsystem.....	8.1
8.1	Nichtsinusförmiges Spannungs- und Stromsystem.....	8.1
8.2	Gewinnung der Zeitwerte aus einem Raumzeiger.....	8.5
8.2.1	Zeitwerte aus Raumzeiger mit Nullkomponente.....	8.6
8.3	Beispiel zum Raumzeiger.....	8.6
8	Blocktaktung.....	8.1
8.1	Block- oder Grundfrequenztaktung.....	8.1
8.2	Dreifachtaktung.....	8.6
8.3	Mitrotierendes Bezugssystem.....	8.7
8.4	Stromraumzeiger bei Stromeinprägung.....	8.8
8.5	Dreipunktwechselrichter.....	8.9

---

9	Nichtsinusförmiger symmetrischer Betrieb .....	9.1
9.1	Stationärer Betrieb bei nichtsinusförmiger symmetrischer Speisung .....	9.1
9.2	Anwendung des Superpositionsprinzips auf das lineare System .....	9.2
9.2.1	Herleitung .....	9.2
9.2.2	Anwendung auf die ASM .....	9.3
9	Berechnung von Strangspannungen und Raumzeigern .....	9.1
9.1	Leiterspannungen sind bekannt .....	9.1
9.1.1	Sternschaltung .....	9.1
9.1.2	Dreieckschaltung .....	9.3
9.2	Klemmenspannungen gegen einen Mittelleiter sind bekannt .....	9.3
9.2.1	Sternschaltung .....	9.3
9.2.2	Dreieckschaltung .....	9.4
11	Abschalten einer ASM .....	11.1
11.1	Ausgangsbedingungen .....	11.1
11.2	Gleichungssystem .....	11.2
11.3	Streufaktoren .....	11.2
11.4	Rotorstrom $i_R$ .....	11.3
11.4.1	Abkürzungen Streufaktoren und Zeitkonstanten .....	11.4
11.4.2	Zusammenhang mit der Dämpfung $d$ und Resonanzkreisfrequenz .....	11.5
11.5	Ständerstrom .....	11.6
11.6	Zusammenfassung .....	11.6
12	Asynchronmaschine am unsymmetrischen Netz .....	12.1
12.1	Symmetrische Komponenten .....	12.1
12.1.1	Definition von Mit- Gegen- und Nullsystem .....	12.2
12.1.2	Beispiel reines Mitsystem .....	12.2
12.1.3	Beispiel reines Gegensystem .....	12.3
12.1.4	Beispiel reines Nullsystem .....	12.4
12.1.5	Umkehrung der symmetrischen Komponenten .....	12.4
12.2	Beispiele zu den symmetrischen Komponenten .....	12.4
12.2.1	Mit- und negative Gegenkomponente .....	12.4
12.2.2	Beispiel 2 zur Mit- und Gegenkomponente .....	12.5
12.2.3	Beispiel 3 zur Mit- und Gegenkomponente .....	12.6
12.3	Anwendung auf die ASM .....	12.6
12.3.1	Anteil des Mitsystems .....	12.7
12.3.2	Anteil des Gegensystems .....	12.8
12.3.3	Anteil des Nullsystems .....	12.9
12.3.4	Superposition der drei Systeme .....	12.10
12.3.5	Moment des Mitsystems .....	12.11
12.3.6	Drehmoment des Gegensystems .....	12.11
12.4	Ständerleistung der ASM: .....	12.12
12.4.1	Leistungsbilanz .....	12.14
12.5	Herleitung Kloss'sche Formel .....	12.14
12.6	Beispiel zu den symmetrischen Komponenten .....	12.17
12.6.1	Einphasenmotor .....	12.17
12.6.2	Unterbrechung eines Statorstranges .....	12.20
14	Synchronmaschine Feldfaktoren .....	14.1
14.1	Bestimmung der Feldfaktoren .....	14.1
14.1.1	Bestimmung der Induktivitäten .....	14.1

14.1.2	Induktivität Ständer-Erregerwicklung.....	14.2
14.1.3	Induktivität Ständer-Dämpferlängswicklung SD.....	14.2
14.1.4	Induktivität Ständer-Dämpferwicklung Quer SQ.....	14.3
14.1.5	Induktivität der Ständerwicklungen.....	14.3
14.2	Transformation des Gleichungssystems.....	14.4
21	Steuerverfahren von SM.....	21.1
21.1	Rotororientierte Steuerung.....	21.1
21.2	Statorflußorientierte Steuerung.....	21.2
15	Leistungen bei der SM.....	15.1
15.1	Motor- und Generatorbetrieb.....	15.1
15.2	Betriebskennlinien der Vollpolmaschine.....	15.1
15.2.1	V-Kurven.....	15.3
15.2.2	Regulierkurven.....	15.4
15.2.3	Grenzkurven von Strom und Leistungen.....	15.7
15.2.4	Phasenschieberbetrieb.....	15.7
15.2.5	Konstanter Strom – Phasenwinkel beliebig.....	15.7
30	Stichwortverzeichnis.....	30.1





# 1 Drehstrommaschinen

Die prinzipielle Wirkungsweise einer elektrischen Maschine beruht auf der Wechselbeziehung zwischen magnetischen Feldern und Wicklungen. Es sollen deshalb hier die notwendigen statische und dynamische Zusammenhänge der Drehstrommaschinen analysiert werden.

Um die Maschinen optimal zu steuern bzw. zu regeln ist auch die der regelungstechnischen Struktur erforderlich.

Die Asynchronmaschine (ASM) ist wegen ihrer Robustheit die am häufigsten für elektrische Antriebsaufgaben eingesetzte Maschine. Deshalb sind mehr als 80% aller Elektromotoren über 1kW Leistung Asynchronmotoren. Nachteilig ist die enge Bindung der Drehzahl an die speisende Netzfrequenz. Bei Direktanschluß an das 50 Hz-Netz sind dadurch keine Drehzahlen über 3000 1/min erreichbar. Die Anpassung der Drehzahl an den Arbeitsprozess muß daher mit Getrieben oder mit elektronischen Umrichter erfolgen, was heute kein Problem mehr darstellt.

Die Synchronmaschine (SM) wird vor allem als Generator bei der Energieumwandlung in Kraftwerken zur Erzeugung der Drehspannung eingesetzt. Als Motor verwendet man die Synchronmaschine bei großen Leistungen, z.B. als Antrieb von Drehrohröfen. Wegen dem gegenüber Asynchronmaschinen kleineren Bauvolumen werden Synchronmaschinen kleinerer Leistung ( $P < 50 \text{ kW}$ ) auch für Werkzeugmaschinen eingesetzt. Auch bei Antrieben in Spinnereien, wo mehrere mechanische unabhängige Einheiten exakt synchron laufen müssen, verwendet man die SM.

## 1.1 Anwendungen von Drehstrommaschinen

Hier sollen zunächst nur ein paar kurze Anwendungsbeispiele von ASM und Synchronmaschine gezeigt werden.



Bild 1.1: Diesel-elektrischer Antrieb eines Muldenkippers in einer Erzmine. An jedem Rad sitzt eine Asynchronmaschine (Siemens)



Bild 1.2: Intercity: Asynchronmaschinen als Hauptantrieb. (Hamburg Altona)



Bild 1.3: Asynchronmaschinen als Förder- und Hauptantrieb in einem Walzwerk.

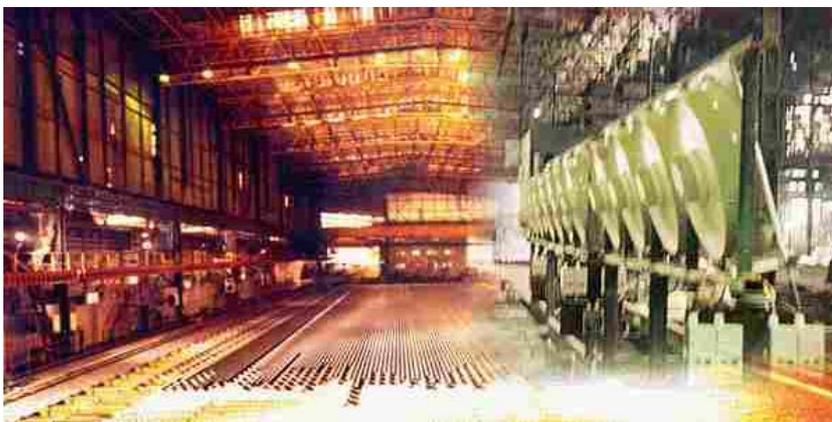


Bild 1.4: Asynchronmaschinen als Lüfterantrieb in einem Walzwerk.



Bild 1.5: Asynchronmaschine mit Außenbelüftung.



Bild 1.6: Asynchronmaschinen als Antrieb für Kompressoren.



Bild 1.7: Anwendung einer Synchronmaschine bei der Energieerzeugung durch Windkraft.

## 1.2 Wicklungen von Drehstrommaschinen

- **Ankerwicklung:** Ankerwicklungen sind Wicklungen in denen die zum Energieumsatz notwendige Spannung induziert wird.
- **Erregerwicklung:** Erregerwicklungen erzeugen das für den Energieumsatz notwendige magnetische Feld. Erregerwicklungen sind normalerweise nicht am Energieumsatz beteiligt.
- **Dämpferwicklung:** Dämpferwicklungen von Synchronmaschinen bewirken die Dämpfung unerwünschten Nebeneffekte.

## 1.3 Bezeichnung von Wicklungsteilen

- **Spule:** Eine Spule besteht aus mehreren konzentrierten in Reihe geschalteten Windungen. Da keine Stromverzweigung vorhanden ist, werden alle Windungen vom gleichen Strom durchflossen.
- **Spulenseite:** Jede Spule einer Ankerwicklung belegt mindestens zwei oder mehr Nuten des Ankers vollständig oder auch nur teilweise. Die in den Nuten geradlinig verlaufenden Spulenteile heißen Spulenseite.
- **Wickelkopf:** Die Verbindungsteile zwischen den Spulenseiten nennt man Wickelköpfe, Spulenköpfe oder auch Stirnverbindungen. Besteht eine Spulenseite aus nur einer Windung, dann nennt man diese Halbwindung einen Stab.

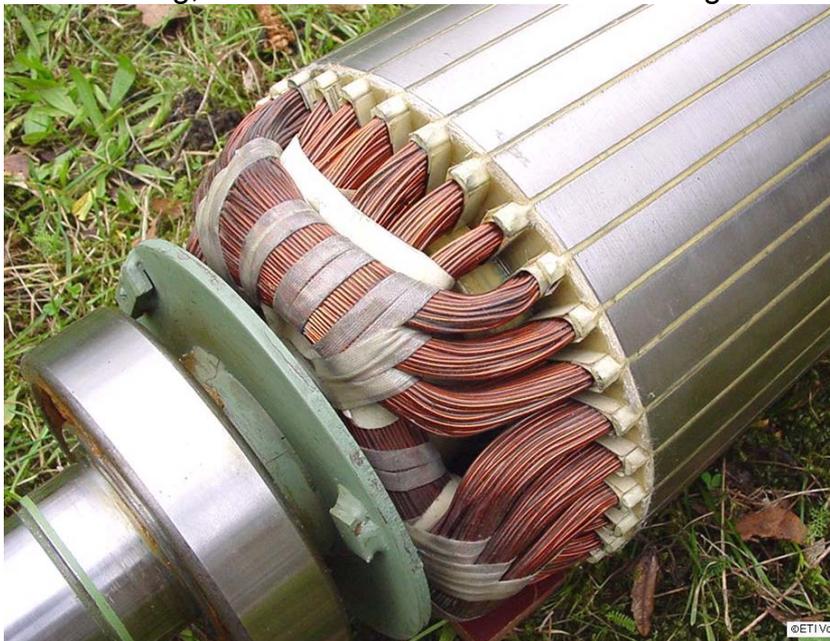
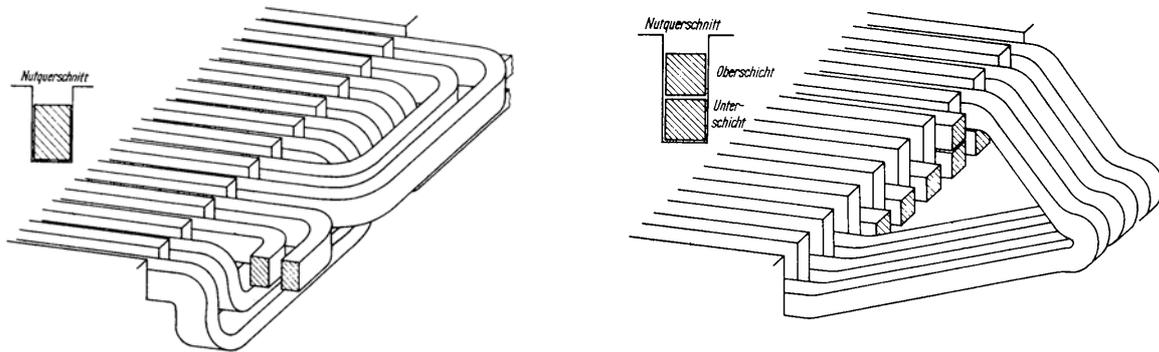


Bild 1.8: Wickelköpfe bei einem Rotor eines Schleifringläufers. Ein Strang ist hier in insgesamt 6 Nuten untergebracht. Einschichtwicklung. Spulenweite ist nicht konstant damit der Wickelkopf kleiner wird.

- **Windungszahl:** Bei der Windungszahl  $w$  werden alle zu einem Strang gehörenden Windungen gezählt. Bei Polpaarszahlen  $p > 1$  hat dann eine Spule entsprechend  $w/p$  Windungen.
- **Spulenweite  $s$ :** Mit Spulenweite bezeichnet man den Mittelabstand der beiden Spulenseiten, gemessen längs des Ankermantels.

- **Zweischichtwicklung:** Befinden sich mehrere Spulenseiten in einer Nut, dann hat man eine Mehrschichtwicklung. Meistens sind aber nur zwei Schichten vorhanden (Ober- und Unterschicht).



a) b)  
Bild 1.9: a) Einschicht- und b) Zweischichtwicklung

- **Strang:** Alle zu einer Phase eines Ein- oder Mehrphasensystems gehörenden Spulen bilden einen Strang. Ein Wicklungsstrang kann aus mehreren parallel- oder in Reihe geschalteten Spulen bestehen.
- **Polteilung:** Die Polteilung  $\tau_p$  ist der geometrische Abstand zwischen mag. Nord- und Südpol, der von der Spule erzeugt wird.
- **Durchmesserspulen:** Ist die Spulenweite der Spulen gleich der Polteilung  $\tau_p$ , so spricht man von einer Durchmesserspule.
- **Gesehnte Wicklung:** Bei einer gesehnten Wicklung oder auch Sehnenwicklung ist die Spulenweite kleiner (oder auch größer) als die Polteilung.

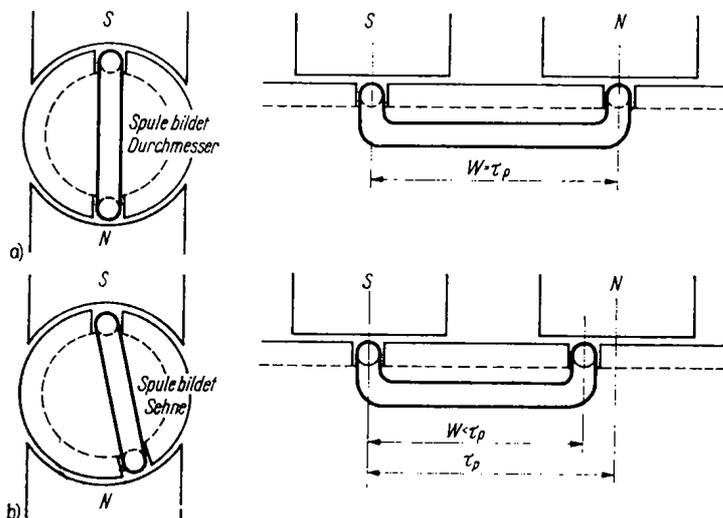
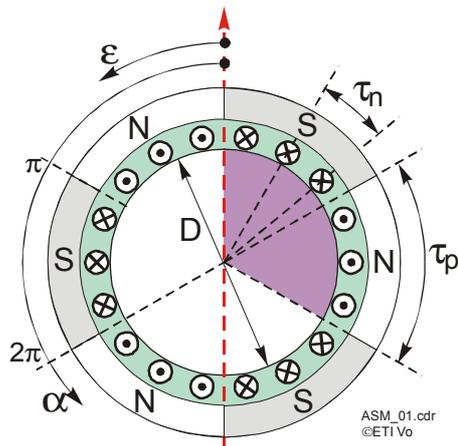


Bild 1.10: a) Durchmesserspule und b) gesehnte Wicklung

- **Nutteilung  $\tau_n$ :** Die Nutteilung ist der geometrische Abstand zwischen zwei Nuten.



$\alpha$  = el. Winkel  
 $\varepsilon$  = mech. Winkel

$$dx = r \cdot d\varepsilon$$

$$\alpha = p \cdot \varepsilon$$

$$d\alpha = p \cdot d\varepsilon$$

Bild 1.11: Definition von Polteilung  $\tau_p$ , Nutteilung  $\tau_n$ , elektrischer-  $\alpha$  und mechanischer  $\varepsilon$  Winkel am Beispiel eines Ständers mit 3 Polpaaren und 18 Nuten.

## 1.4 Verkopplung von Wicklungen

In der folgenden Tabelle sind die prinzipiell möglichen Verkopplungen von Spulen dargestellt. Im allgemeinen Fall sind die Induktivitäten dabei von dem räumlichen Abstand  $x$  oder einem Positionswinkel abhängig.

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix}$$

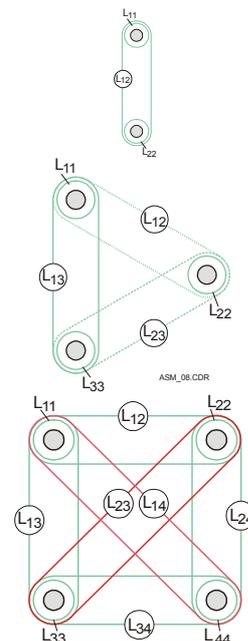


Tabelle 1: Prinzipielle Verkopplung von Induktivitäten

## 1.5 Mechanischer und elektrischer Winkel

Oft ist das elektrische System auf dem mechanischen Umfang mehrfach angeordnet, so daß man zwischen einem elektrischen Winkel  $\alpha$  und einem mechanischen Winkel unterscheiden muß. Wenn das elektrische System  $p$ -fach am Umfang vorhanden ist gilt für diesen Zusammenhang:

$$\Omega = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{p} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad \text{oder} \quad \Omega = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{p} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

$$\Omega = \frac{1}{p} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

$\varepsilon$  ist der mechanische Winkel

$\gamma$  ist der elektrische Winkel

$\alpha$  ist die Zählrichtung für den elektrischen Winkel

$p$  ist die Polpaarzahl

Wenn das el. System mit der Kreisfrequenz  $\omega$  gespeist wird gilt für die synchrone Drehzahl

$$\Omega_s = \frac{\omega}{p} \quad (1.1)$$

Die synchrone Drehzahl  $n_s$  erhält man daraus zu

$$n_s = \frac{\Omega_s}{2\pi} = \frac{\omega}{p \cdot 2\pi} = \frac{f}{p} \quad (1.2)$$

mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  wird

$$P_{mech} = \Omega \cdot M_i \quad (1.3)$$

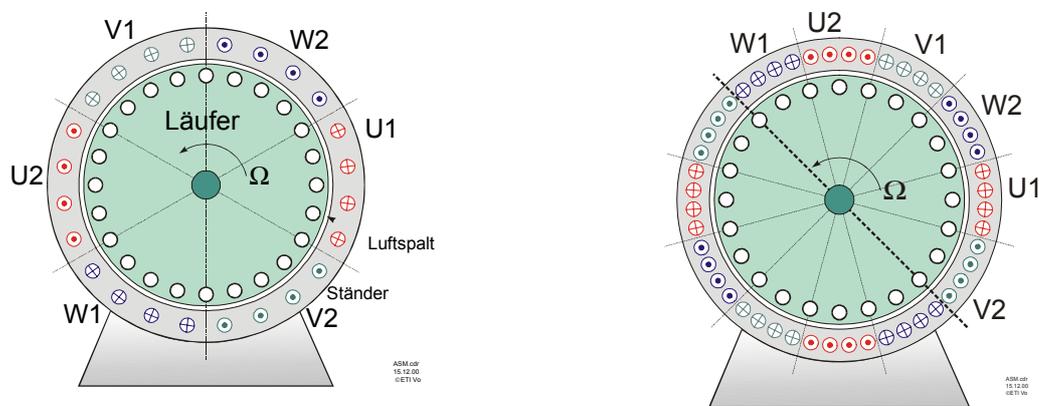


Bild 1.12: Beispiel zur Anordnung der Wicklungen bei einem und zwei Polpaaren.

## 1.6 Drehmoment allgemein

Herleitung des Drehmoments bei einer rotierenden Maschine.

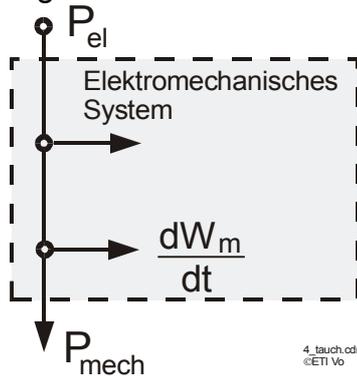


Bild 1.13: Leistungsbilanz bei einem elektro-mechanischen System.

Das Spannungsgleichungssystem für ein elektromechanisches System z.B. el. Motor mit mehreren Wicklungen lautet allgemein:

$$(u) = (R) \cdot (i) + \frac{d\{\Psi\}}{dt} \quad \text{mit} \quad (1.1)$$

$$(\Psi) = (L(\gamma)) \cdot (i) \quad (1.2)$$

Bei den rotierenden Maschinen wird angenommen, daß die Induktivität bzw. der magnetische Fluß vom Stellungswinkel  $\gamma$  abhängig ist. Bei linear wirkenden Systemen kann die Induktivität auch von einer Position  $x$  abhängig sein. Vereinfachend wird im folgenden einfach  $(L) = (L(\gamma))$  geschrieben.

Für die über die elektrischen Anschlüsse ausgetauschte Leistung gilt für das System:

$$(i)^T \cdot (u) = (i)^T \cdot (R) \cdot (i) + (i)^T \cdot \frac{\partial(\Psi)}{\partial t} \quad (1.3)$$

Die Leistungsbilanz beschreibt, daß die zugeführte Leistung sich in Verluste innerhalb des Systems, in die Änderung magnetisch gespeicherter Energie und in mechanische Energie aufteilt.

$$P_{zu} = P_v + \frac{\partial W_m}{\partial t} + P_{mech} \quad (1.4)$$

Der Koeffizientenvergleich mit der elektrisch zugeführten Leistung ergibt:

$$P_{zu} = (i)^T \cdot (u) \quad (1.5)$$

$$P_v = (i)^T \cdot (R) \cdot (i) \quad (1.6)$$

$$(i)^T \frac{\partial(\Psi)}{\partial t} = \frac{\partial W_m}{\partial t} + P_{mech} \quad (1.7)$$

Die magn. Energie ist:

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2} (i)^T (L) \cdot (i)} \quad \text{und die zeitliche Änderung davon}$$

$$\frac{\partial W_m}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial(i)^T}{\partial t} (L) \cdot (i) + \frac{1}{2} (i)^T \cdot \frac{\partial(L)}{\partial t} (i) + \frac{1}{2} (i)^T \cdot (L) \cdot \frac{\partial(i)}{\partial t} \quad (1.8)$$

Wegen  $\frac{1}{2} \frac{\partial(i)^T}{\partial t} (L)(i) = \frac{1}{2} (i)^T \cdot (L) \cdot \frac{\partial(i)}{\partial t}$  wird

$$(i)^T \frac{\partial(L)}{\partial t} (i) + (i)^T (L) \cdot \frac{\partial(i)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial(i)^T}{\partial t} \cdot (L) \cdot (i) + \frac{1}{2} (i)^T \cdot \frac{\partial(L)}{\partial t} (i) + \frac{1}{2} (i)^T \cdot (L) \cdot \frac{\partial(i)}{\partial t} + P_{mech}$$

Also bleibt nach dem Zusammenfassen:

$$\boxed{P_{mech} = \frac{1}{2} (i)^T \cdot \frac{\partial(L)}{\partial t} (i)} \quad (1.9)$$

$$\frac{1}{2} (i)^T \cdot \frac{\partial(L)}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial(\gamma)}{\partial t} \cdot (i) = \Omega \cdot M_i = \frac{1}{p} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} \cdot M_i \quad (1.10)$$

$$\boxed{M_i = \frac{p}{2} \cdot (i)^T \frac{\partial(L)}{\partial \gamma} (i)} \quad (1.11)$$

Diese Gleichung besagt, daß ein Drehmoment nur dann auftritt, wenn sich beispielsweise bei konstantem Stromvektor ( $i$ ) die Induktivität mit dem el. Rotorpositionswinkel  $\gamma$  ändert. Zur Bestimmung des Drehmoments ist es daher notwendig, die Induktivitäten der Drehstrommaschinen als Funktion des Positionswinkels  $\gamma$  zu bestimmen. Dies geschieht im Kapitel 2.

Bei einem starren mechanischen Verband gilt außerdem noch die mechanischen Gleichung

$$\boxed{M_{il} = J \cdot \frac{1}{p} \cdot \ddot{\gamma} + M_L}$$

wobei  $J$  das Trägheitsmoment des Antriebs ist.

Bei rotierenden Maschinen ist die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$ .





## 2 Berechnung von Luftspaltinduktivitäten

Zur Beschreibung des Maschinenverhaltens werden die im folgenden gemachten Vernachlässigung vorgenommen. Trotz der dadurch bedingten Abweichungen vom tatsächlichen Maschinenverhalten ist die Genauigkeit in der Regel ausreichend.

### 2.1 Voraussetzungen

- Mag. Spannung im Eisen ist vernachlässigbar. D.h. ist  $H_{Fe}=0$
- Endeffekte an den Stirnseiten bleiben unberücksichtigt
- Glatte Mantelflächen von Stator und Rotor
- In der Nutschlitzmitte soll die Durchflutung konzentriert sein. Die gesamte Durchflutung einer Nut wird deshalb als  $\delta$ -Impuls dargestellt.

### 2.2 Vorgehensweise

Die im Luftspalt der Maschine gespeicherte Energie wird aus dem Volumenintegral der Energiedichte berechnet und mit dem Ausdruck für diskrete Induktivitäten verglichen.

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \int_V B \cdot H \cdot dV \quad (2.1)$$

Bei linearem Zusammenhang zwischen B und H (z.B. Luft) gilt auch

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \int_V B \cdot H \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot \int_V H^2 \cdot dV \quad (2.2)$$

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot (i)^T \cdot (L) \cdot (i) \quad (2.3)$$

Der Koeffizientenvergleich liefert die Luftspaltinduktivitäten als Elemente der Induktivitätsmatrix ( $L$ ). Wenn beispielsweise zwei Spulen beteiligt sind, ist ( $i$ ) ein Spaltenvektor und ( $L$ ) eine 2\*2 Matrix

$$(i) = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (L) = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} \\ L_{ab} & L_{bb} \end{bmatrix}$$

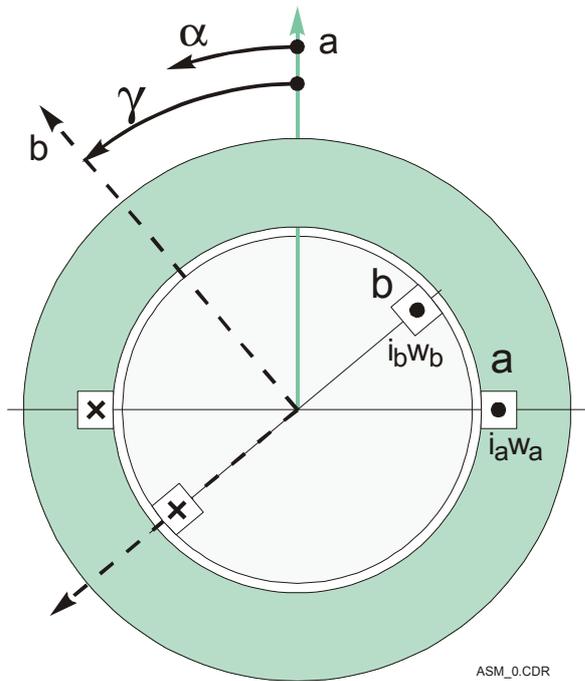
Nach dem Ausmultiplizieren liefert der Koeffizientenvergleich von Gl.(2.3) mit Gl.(2.2) dann die gesuchten Induktivitäten

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot L_{aa} \cdot i_a^2 + L_{aa} \cdot i_a \cdot i_b + \frac{1}{2} \cdot L_{bb} \cdot i_b^2 \quad (2.4)$$

Die genaue Vorgehensweise wird anhand des folgenden Zweispulenmodells demonstriert. Die Ergebnisse lassen sich daraus dann auch auf die Drehstrommaschinen anwenden.

### 2.3 Zweispulenmodell

Zum grundsätzlichen Berechnung der Induktivität zwischen zwei drehbaren Spulen wird ein Zweispulenmodell mit zwei Durchmesserspulen benutzt.



- D Bohrungsdurchmesser  
 p Polpaarzahl  
 l aktive Maschinenlänge  
 δ mechanische Luftspalt (nicht ein-  
 gezeichnet)  
 α Zählrichtung elektrischer Winkel  
 γ mechanische Winkel zwischen  
 den zwei Spulen  
 a, b mag. Richtung der Wicklungen

ASM\_0.CDR

Bild 2.1: Zweispolenmodell mit Durchmesserspulen

Um die Nutung zu berücksichtigen wird der mechanische Luftspalt δ für die Rechnung vergrößert und anstatt δ wird der um 3..10 % größere Luftspalt δ'' geschrieben.

Das Luftspaltvolumenelement ausgedrückt mit dem Winkel

$$dV = (r \cdot d\gamma) \cdot l \cdot \delta'' = \frac{D}{2} \cdot \frac{1}{p} \cdot d\alpha \cdot l \cdot \delta'' \quad (2.5)$$

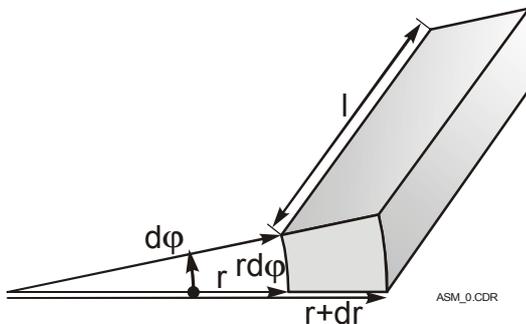


Bild 2.2: Luftspaltvolumenelement dV

Den Bohrungsdurchmesser D kann man mit Hilfe der Polteilung  $\tau_p$  ausdrücken. Am mechanischen Umfang gilt:

$$\pi \cdot D = p \cdot 2 \cdot \tau_p \quad \text{oder daraus} \quad D = \frac{p \cdot 2 \cdot \tau_p}{\pi}$$

Setzt man das Volumenelement dV und den Durchmesser D in  $W_m$  ein, geht das Volumenintegral nach Gl.(2.2) in ein Winkelintegral über:

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot \int_V H^2 \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot \int_V H^2 \cdot \overbrace{\frac{1}{2} D \cdot \frac{1}{p} l \delta'' d\alpha}^{dV} = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot \int_V H^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{p \cdot 2 \cdot \tau_p}{\pi} \cdot \frac{1}{p} l \delta'' d\alpha$$

$$W_m = \frac{1}{2\pi} \cdot \mu_0 \cdot l \cdot \tau_p \cdot \int_0^{p \cdot 2\pi} H^2 \cdot \delta'' d\alpha \quad (2.6)$$

Bei Polpaarsymmetrie ist  $H(\alpha)$   $2\pi$ -periodisch und  $\delta''(\alpha)$   $\pi$ -periodisch, so dass man über  $2\pi$  integrieren muss.

$$W_m = \frac{p}{2\pi} \cdot \mu_0 \cdot l \cdot \tau_p \cdot \int_0^{2\pi} H^2(\alpha) \cdot \delta''(\alpha, t) \cdot d\alpha \quad (2.7)$$

Unter  $H(\alpha)$  wird die mittlere Radialkomponente der mag. Feldstärke im Luftspalt verstanden. Die mag. Spannung zwischen zwei auf dem gleichen Strahl liegenden Punkten von Stator und Rotor ist dann

$$v(\alpha) = \int_{r_1(\alpha)}^{r_1(\alpha) + \delta''(\alpha)} \vec{H}(r) \cdot d\vec{r} = H(\alpha) \cdot \delta''(\alpha) \quad (2.8)$$

$r_1$  ist der zum Winkel  $\alpha$  gehörende Rotorradius. Bei zylindrischem Rotor ist  $r_1$  unabhängig vom Winkel  $\alpha$ . In  $W_m$  wird die Feldstärke  $H$  durch die mag. Spannung ersetzt.

$$H(\alpha) = \frac{v(\alpha)}{\delta''(\alpha)} \quad (2.9)$$

$$W_m = \frac{p}{2\pi} \cdot \mu_0 \cdot l \cdot \tau_p \cdot \int_0^{2\pi} \frac{v^2(\alpha)}{\delta''(\alpha, t)} \cdot d\alpha \quad (2.10)$$

Die magnetische Spannung  $v(\alpha)$  muss aus den Durchflutungen bzw. dem Strombelag  $a(\alpha)$  bestimmt werden.  $[a(\alpha)] = \frac{A}{m}$ .

Der Strombelag ist hier nur auf dem Ständer vorhanden.

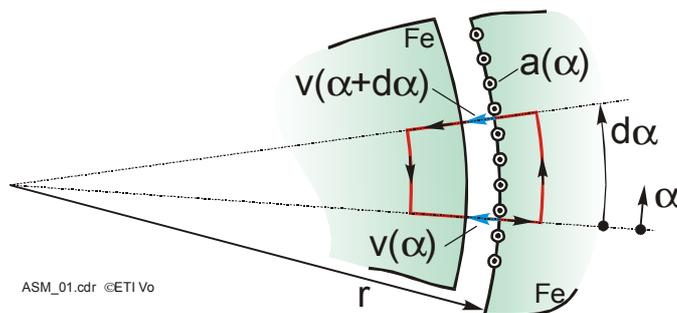


Bild 2.3: Strombelag und mag. Spannung auf dem Ständer

Die Anwendung des Durchflutungsgesetzes bei dem in Bild 2.3 angedeuteten Umlauf liefert nur in den Luftspaltabschnitten ein Beitrag ( $v_S = v_R = 0$ ):

$$\int H ds = \sum v = \sum I$$

$$\underbrace{v_S}_{=0} + v(\alpha + \Delta\alpha) + \underbrace{v_R}_{=0} - v(\alpha) = a(\alpha) \cdot \Delta x \quad (2.11)$$

$\Delta x$  ist das dem räumlichen Winkel  $\frac{1}{p} \Delta\alpha$  entsprechende Wegelement:

$$\Delta x = r \cdot \Delta \varepsilon = r \cdot \frac{\Delta \alpha}{p} \quad (2.12)$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta \varepsilon} = \frac{\Delta x}{\frac{1}{p} \cdot \Delta \alpha} = \frac{2p \cdot \tau_p}{2\pi} \rightarrow \Delta x = \frac{\tau_p}{\pi} \Delta \alpha$$

$$\frac{v(\alpha + \Delta \alpha) - v(\alpha)}{\Delta \alpha} = \frac{\tau_p}{\pi} \cdot a(\alpha)$$

Der Grenzübergang ergibt:

$$\boxed{\frac{dv(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\tau_p}{\pi} a(\alpha)} \quad (2.13)$$

$\varepsilon$  ist der mechanische Winkel

$\alpha$  ist der elektrische Winkel

Durch Integration von Gl.(2.13) erhält man die magnetische Spannung (Felderregerkurve) aus dem Strombelag  $a(\alpha)$ :

$$\boxed{v(\alpha) = \frac{\tau_p}{\pi} \int a(\alpha) d\alpha + C} \quad (2.14)$$

Die Integrationskonstante  $C$  folgt aus der Bedingung, dass der Hüllenfluss verschwinden muss. Für die polpaarsymmetrische Anordnung bedeutet dies:

$$\operatorname{div} B = 0 \quad ; \quad \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \quad \text{oder} \quad \int_{\alpha=0}^{2\pi p} H(\alpha) \cdot d\alpha = 0 \quad \text{also auch}$$

$$\boxed{\int_{\alpha=0}^{2\pi} v(\alpha) d\alpha = 0} \quad (2.15)$$

Bei einem beliebigen Zweispulenmodell, für das die eingangs gemachten Voraussetzungen gelten, überlagern sich die Felderregerkurven der beiden Spulen  $a$  und  $b$  zur resultierenden Felderregerkurve

$$\boxed{v(\alpha) = v_a(\alpha) + v_b(\alpha)} \quad (2.16)$$

Die Felderregerkurven der einzelnen Spulen werden als Produkte aus einer Geometriefunktion und dem zeitabhängigen Strom dargestellt:

$$v_a(\alpha) = g_a(\alpha, t) \cdot i_a(t) \quad (2.17)$$

$$v_b(\alpha) = g_b(\alpha, t) \cdot i_b(t) \quad (2.18)$$

Durch Ausmultiplizieren von

$$W_m = \frac{1}{2\pi} \cdot \mu_0 \cdot p \cdot l \cdot \tau_p \cdot \int_{\alpha=0}^{2\pi} \frac{1}{\delta''(\alpha)} \cdot v(\alpha)^2 \cdot d\alpha$$

erhält man

$$\boxed{W_m = \frac{p}{2\pi} \cdot \mu_0 \cdot l \cdot \tau_p \cdot \int_{\alpha=0}^{2\pi} \frac{g_a^2 \cdot i_a^2 + 2 \cdot g_a \cdot g_b \cdot i_a \cdot i_b + g_b^2 \cdot i_b^2}{\delta''(\alpha, t)} \cdot d\alpha} \quad (2.19)$$

Diese über die Ströme und Geometriefunktionen berechnete mag. Energie kann nun mit der aus diskreten Elementen der Induktivitätsmatrix berechneten Energie verglichen werden. Die aus der Induktivitätsmatrix berechnete Energie ist bei zwei Induktivitäten

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot (i_1, i_2) \cdot \begin{pmatrix} L_{aa} & L_{ab} \\ L_{ab} & L_{bb} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad (\text{Skalar-Produkt}) \quad (2.20)$$

wobei  $L_{ab}=L_{ba}$  ist

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot L_{aa} \cdot i_a^2 + L_{ab} \cdot i_a \cdot i_b + \frac{1}{2} \cdot L_{bb} \cdot i_b^2 \quad (2.21)$$

Betrachtet man die Wechselinduktivität zwischen den beiden Spulen a und b, so hat man den allgemeinen Fall. Es ergibt sich durch Koeffizientenvergleich mit Gl.(2.19)

$$L_{ab} = \frac{p}{\pi} \cdot \mu_0 \cdot l \cdot \tau_p \int_{\alpha=0}^{2\pi} \frac{1}{\delta'(\alpha)} \cdot g_a(\alpha, t) \cdot g_b(\alpha, t) \cdot d\alpha \quad (2.22)$$

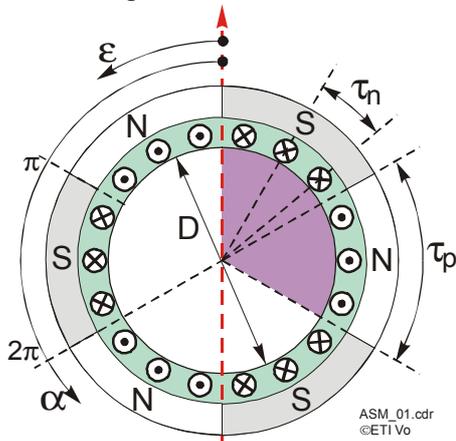
Die Eigeninduktivitäten  $L_{aa}$  und  $L_{bb}$  erhält man, indem man  $b$  durch  $a$  oder umgekehrt ersetzt.

### 2.3.1 Andere Herleitung für den Strombelag

Allgemein ist der Strombelag bei linearer Abmessung

$$a(x) = \frac{dv(x)}{dx} = \frac{dv(x)}{r \cdot d\varepsilon} \quad [a] = \frac{A}{m} \quad (2.23)$$

mit dem Wegelement  $dx = r \cdot d\varepsilon$



$\alpha$  = el. Winkel  
 $\varepsilon$  = mech. Winkel

$$dx = r \cdot d\varepsilon$$

$$\alpha = p \cdot \varepsilon$$

$$d\alpha = p \cdot d\varepsilon$$

Bild 2.4: Definition von Polteilung  $\tau_p$ , Nutteilung  $\tau_n$ , elektrischer-  $\alpha$  und mechanischer  $\varepsilon$  Winkel am Beispiel eines Ständers mit 3 Polpaaren und 18 Nuten.

Der elektrische Winkel  $\alpha$  läuft  $p$ -fach schneller als der mechanische Winkel  $\varepsilon$ . Meistens ist der elektrische Winkel bzw. dessen Änderung durch die Speisefrequenz gegeben. Deshalb läuft der mechanische Winkel  $\varepsilon$  nur mit der  $1/p$ -fachen Geschwindigkeit. Bei mehrpoligen Maschinen ist die synchrone Drehzahl deshalb um  $1/p$  kleiner. Setzt man den Zusammenhang  $d\alpha = p \cdot d\varepsilon$  in die Gl. für den Strombelag ein, wird

$$\boxed{a(x) = \frac{dv(x) \cdot p}{r \cdot d\alpha}} \quad (2.24)$$

Weiterhin ist der mechanische Umfang

$$2r \cdot \pi = p \cdot 2 \cdot \tau_p \quad \text{oder} \quad \frac{r}{p} = \frac{\tau_p}{\pi}$$

Setzt man diesen Faktor ebenfalls noch ein, erhält man den Strombelag wie schon oben hergeleitet im el. Winkel dargestellt. ( $\tau_p$  ist eine mech. Länge!)

$$\boxed{a(\alpha) = \frac{\pi}{\tau_p} \cdot \frac{dv}{d\alpha}} \quad (2.25)$$

### 2.3.2 Beispiel für einen Strombelagsimpuls

Betrachtet wird hier zunächst ein kontinuierlich auf die Breite  $l$  gleichmäßig verteilten Strombelag, wie er in Bild 2.5 dargestellt ist.

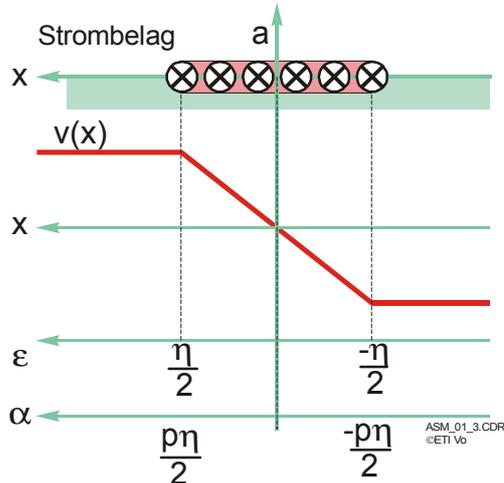


Bild 2.5: Strombelag und mag. Spannung auf dem Ständer

Ein Strom fließt nur in den Wicklungen, die in den endlich breiten Nuten liegen. Weil die Windungszahl für einen Strang gezählt wird, sind auf einer Spulenseite  $w/p$  Windungen gleichmäßig auf die Breite  $l$  der Nut verteilt. Bei der Nutbreite  $l$  wird daher der Strombelag

$$a(x) = \frac{w \cdot i_a}{p \cdot l} \quad (2.26)$$

Für die mag. Spannung erhält man dann

$$v = \int_{-l/2}^{l/2} a \cdot dx = \frac{w \cdot i_a}{p \cdot l} \cdot l = \frac{w \cdot i_a}{p} \quad (2.27)$$

Im Winkelmaß ausgedrückt

$$v = \int a \cdot dx = \int a \cdot r \cdot d\epsilon = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} a \cdot r \cdot \frac{d\alpha}{p} \quad (2.28)$$

Der Länge  $l$  entspricht nach Bild 2.5 der mechanische Winkel  $\eta$  bzw. der el. Winkel  $\eta \cdot p$ . Deshalb wird der Strombelag

$$a(x) = \frac{w \cdot i}{p \cdot l} = \frac{w \cdot i}{p \cdot r \cdot \eta}$$

Für die mag. Spannung wird dann nach Gl.(2.14) im el. Winkel

$$v = \frac{\tau_p}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\eta \cdot p}{2}}^{\frac{\eta \cdot p}{2}} \frac{w \cdot i}{p \cdot r \cdot \eta} \cdot d\alpha = \frac{\tau_p}{r \cdot \pi} \cdot w \cdot i$$

wegen  $2r \cdot \pi = 2 \cdot p \cdot \tau_p$  oder  $\frac{r}{p} = \frac{\tau_p}{\pi}$  wird daraus wie bei der Integration

über die mechanische Länge x

$$\boxed{v = \frac{w \cdot i}{p}} \quad (2.29)$$

Nun soll der Strombelag mit Hilfe der  $\delta$ -Funktion auf die Nutmitte konzentriert werden. In x-Koordinaten kann man für die mag. Spannung die  $\sigma$ -Funktion als Sprungfunktion schreiben

$$v(x) = \frac{w \cdot i}{p} \cdot \sigma(x) \quad (2.30)$$

Die Ableitung hiervon gibt den Strombelagsimpuls an der Stelle

$$a(x) = \frac{dv(x)}{dx} = \frac{w \cdot i}{p} \cdot \delta(x) \quad (2.31)$$

Für den el. Winkel soll die mag. Spannung ebenfalls

$$v(x) = \frac{w \cdot i}{p} \cdot \sigma(x) \text{ sein.} \quad (2.32)$$

Weil aber nach Gl.(2.19)  $\frac{dv(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\tau_p}{\pi} \cdot a(\alpha)$  gilt, erhält man

$$\frac{dv(\alpha)}{d\alpha} = \frac{w \cdot i}{p} \cdot \delta(\alpha) = \frac{\tau_p}{\pi} \cdot a(\alpha) \text{ oder}$$

$$\boxed{a(\alpha) = \frac{\pi}{\tau_p} \cdot \frac{w \cdot i}{p} \cdot \delta(\alpha)} \quad (2.33)$$

Dieses Ergebnis kann nun auf das Zweispulenmodell angewendet werden. In Bild 2.6 sind dazu die Strombelagsimpulse dargestellt. Beispielsweise ist für den Strombelagsimpuls an der Stelle  $\alpha = -\pi/2$  :

$$\delta_a \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{i_a \cdot w_a}{p} \cdot \frac{\pi}{\tau_p} \cdot \delta \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.34)$$

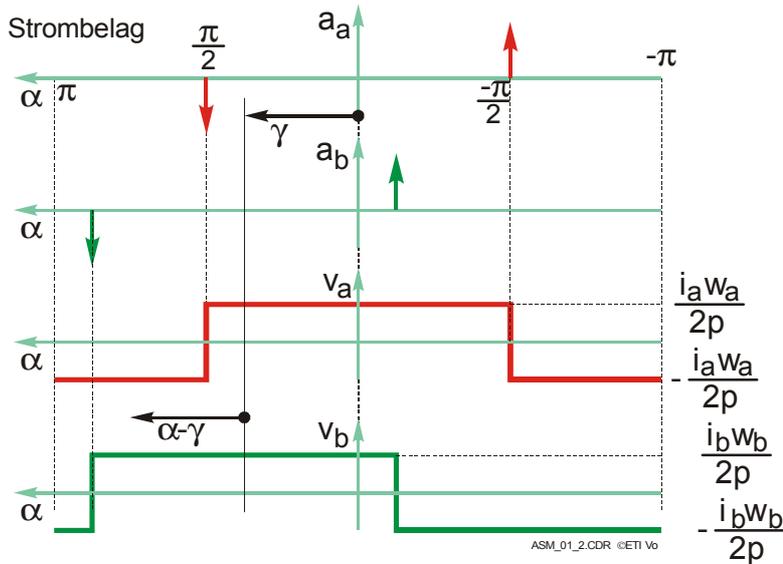


Bild 2.6: Strombelagsfunktion und mag. Spannung beim Zweispulenmodell im el. Winkel

Bei der Berechnung der mag. Spannung wird die Konstante C so bestimmt, dass der Hüllenfluss über dem el. Umfang verschwindet.

$$v_a(\alpha) = \frac{\tau_p}{\pi} \cdot \int \delta_a \cdot \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) \cdot d\alpha = \frac{i_a w_a}{p} \cdot \sigma \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) + C \quad (2.35)$$

Als Felderregerkurven ergeben sich hier Rechteckfunktionen, die um den Winkel  $\gamma$  gegeneinander verschoben sind.

Zur Berechnung der Wechselinduktivität  $L_{ab}$  ist das Produkt der beiden Funktionen in Gl.(2.22) einzusetzen. Das Produkt ergibt eine vom Winkel  $\gamma$  abhängige Rechteckfunktion.

$$L_{ab} = \frac{p}{\pi} \cdot \mu_0 \cdot l \cdot \tau_p \int_{\alpha=0}^{2\pi} \frac{1}{\delta''(\alpha)} \cdot g_a(\alpha, t) \cdot g_b(\alpha, t) \cdot d\alpha \quad (2.36)$$

Das Maximum von  $L_{ab}$  erhält man bei  $\gamma = 0$  wenn die beiden Spulen maximal miteinander verkoppelt sind

$$L_{ab} \Big|_{\gamma=0} = L_{ab \max} = \frac{1}{\pi} \cdot \mu_0 \cdot p \cdot l \cdot \frac{\tau_p}{\delta''} \cdot \frac{w_a}{2p} \cdot \frac{w_b}{2p} \cdot 2\pi = \mu_0 \cdot l \cdot \frac{w_a \cdot w_b \cdot \tau_p}{2 \cdot p \cdot \delta''}$$

$$\boxed{L_{ab \max} = \mu_0 \cdot l \cdot \frac{w_a \cdot w_b \cdot \tau_p}{2 \cdot p \cdot \delta''}} \quad (2.37)$$

$l \cdot \tau_p$  ist dabei die Fläche, durch die der magnetische Fluss hindurchtritt.

Das Minimum, oder vollständige Entkopplung der beiden Spulen, ergibt sich, wenn die beiden Spulen Achsen senkrecht aufeinander stehen. Dies ist bei  $\gamma = 90^\circ; 270^\circ$  der Fall.

$$L_{ab} \Big|_{\gamma=90} = 0$$

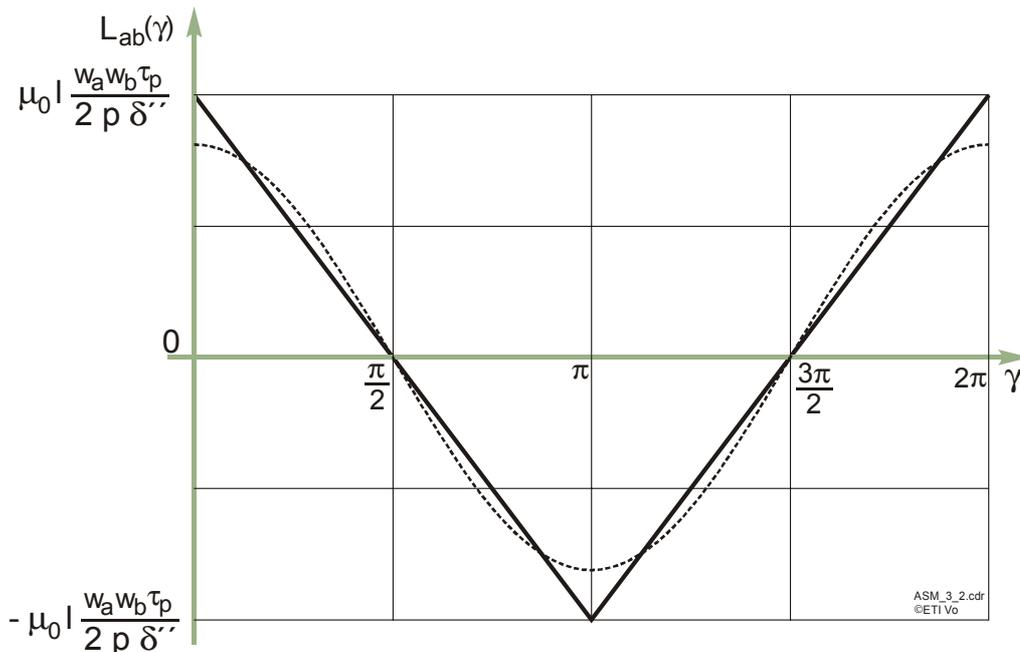


Bild 2.7: Wechselinduktivität  $L_{ab}$  beim Zweispulenmodell.

Diese dreieckförmige Funktion kann auch durch eine Fourierreihe angenähert werden. Allgemein gilt die Fourierzerlegung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx) \quad \text{mit} \quad (2.38)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad \text{und} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin kx \cdot dx \quad (2.39)$$

Für das über  $2\pi$  laufende Dreieck gilt:

$$f(x) = \frac{8 \cdot h}{\pi^2} \cdot \left( \frac{1}{1^2} \cdot \cos x - \frac{1}{3^2} \cdot \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cdot \cos 5x - \frac{1}{7^2} \cdot \cos 7x \dots \right) \quad (2.40)$$

$h$  ist dabei die Höhe der Dreiecksfunktion.

Die Amplitude wird so bestimmt, dass bei  $\gamma=0$  ( $x=0$ ) das Maximum wie in Bild 2.7 auftritt. Dh. muss gelten

$$L_{ab}(\gamma) = \frac{8 \cdot \mu_0 \cdot l \cdot w_a \cdot w_b \cdot \tau_p}{\pi^2 \cdot 2 \cdot p \cdot \delta''} \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2} \cdot \sin^2 \left( v \cdot \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos(v \cdot \gamma) \quad (2.41)$$

Die 1. Harmonische (Grundschiwingung) hat bei dieser Fourierzerlegung die Amplitude

$$L_{ab}(\gamma=0) = \frac{8}{\pi^2} \cdot L_{ab\max} \quad (2.42)$$

Erst wenn alle Oberschwingungen berücksichtigt werden, hat man die exakte Dreiecksfunktion. Die 1. Harmonische ist in Bild 2.7 gestrichelt eingetragen.

Nun wird noch eine weitere Möglichkeit der Berechnung für die Wechselinduktivität gezeigt. Dazu werden die rechteckförmigen Geometriefunktionen mit Hilfe von Fourierreihen ausgedrückt.

## 2.4 Fourier-Reihe einer Rechteckfunktion

Die exakte Geometriefunktion soll nach einer Fourierreihe zerlegt werden. Nach Bild 2.8 ist allgemein für eine um  $\gamma$  verschobene Rechteckfunktion mit der Höhe (Amplitude)  $h$  und der Variablen  $x'$

$$f(x') = \frac{4 \cdot h}{\pi} \left( \cos(x') - \frac{1}{3} \cdot \cos 3(x') + \frac{1}{5} \cdot \cos 5(x') - \frac{1}{7} \cdot \cos 7(x') \cdots \right) \quad (2.43)$$

Mit der Verschiebung um den Winkel  $\gamma$  wird daraus

$$x' = x - \gamma$$

$$f(x) = \frac{4 \cdot h}{\pi} \left( \cos(x - \gamma) - \frac{1}{3} \cdot \cos 3(x - \gamma) + \frac{1}{5} \cdot \cos 5(x - \gamma) \cdots \right) \quad (2.44)$$

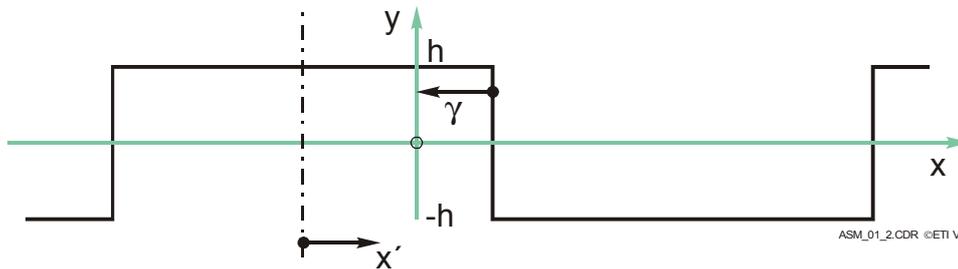


Bild 2.8: Allgemeine Rechteckfunktion mit der Amplitude  $h$  und Periodendauer  $2\pi$ .

Wenn man die Vorzeichen und das Vorzeichen mit Hilfe des Ausdrucks  $\frac{1}{\lambda} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \lambda\right)$  ausdrückt, wird:

$\lambda=1$	$\lambda=3$	$\lambda=5$	...
$\frac{1}{\lambda} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \lambda\right) = 1$	$\frac{1}{\lambda} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \lambda\right) = -\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\lambda} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \lambda\right) = \frac{1}{5}$	...

Die geradzahigen Koeffizienten fallen wegen  $f(x) = -f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  weg! So lautet die

Funktion in Kurzschreibweise

$$f(x) = \frac{4 \cdot h}{\pi} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\lambda} \cdot \sin\left(\lambda \cdot \frac{\pi}{2}\right)}_{1; -\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; -\frac{1}{7}} \cdot \cos \lambda(x - \gamma) \quad (2.45)$$

Mit der Höhe  $h = \frac{w_a}{2 \cdot p}$  wird aus der allgemeinen Funktion die Geometriefunktion

$$g_a(\alpha, t) = \frac{4 \cdot w_a}{\pi \cdot 2 \cdot p} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot \sin\left(\lambda \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\lambda \cdot \alpha) \quad (2.46)$$

und die um  $\gamma$  verschobene Funktion:

$$g_b(\alpha, t) = \frac{2 \cdot w_b}{\pi \cdot p} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \cdot \sin\left(\mu \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\{\mu(\alpha - \gamma)\} \quad (2.47)$$

Diese beiden Funktionen sind nun in die Gl.(2.22) einzusetzen. Es ergibt sich unter der Annahme eines konstanten Luftspalts  $\delta''$  für die Wechselinduktivität

$$L_{ab} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{4 \cdot \mu_0 \cdot \tau_p \cdot l \cdot p \cdot w_a \cdot w_b}{\delta'' \cdot \pi^2 \cdot p^2} \cdot \int_0^{2\pi} \left( \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\lambda} \cdot \sin\left(\lambda \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\lambda \cdot \alpha) \right] \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\mu} \cdot \sin\left(\mu \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\{\mu(\alpha - \gamma)\} \right] \cdot d\alpha \right) \quad (2.48)$$

Die Integration kann mit der Summation vertauscht- und die beiden Summationen können zusammengefasst werden. Mit

$$L_{ab \max} = \mu_0 \cdot l \cdot \frac{w_a \cdot w_b \cdot \tau_p}{2 \cdot p}$$

$$L_{ab} = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{L_{ab \max}}{\pi^2} \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{v^2} \cdot \sin^2\left(v \frac{\pi}{2}\right) \cdot \int_0^{2\pi} (\cos(v \cdot \alpha) \cdot \cos\{v(\alpha - \gamma)\}) \cdot d\alpha \right] \quad (2.49)$$

Für das Integral  $\int_0^{2\pi} (\cos(v \cdot \alpha) \cdot \cos\{v(\alpha - \gamma)\}) \cdot d\alpha$  wird

$$\int_0^{2\pi} \cos(v \cdot \alpha) \cdot \{\cos(v \cdot \alpha) \cdot \cos(v \cdot \gamma) - \sin(v \cdot \alpha) \cdot \sin(v \cdot \gamma)\} \cdot d\alpha$$

Die Integrale über  $\cos(x) \cdot \sin(x)$  verschwinden, so dass übrigbleibt

$$\int_0^{2\pi} (\cos^2(v \cdot \alpha) \cdot \cos(v \cdot \gamma)) \cdot d\alpha = \left[ \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4v} \cdot \sin(2v\alpha) \right]_0^{2\pi} \cdot \cos(v \cdot \gamma)$$

$$= \frac{2\pi}{2} \cdot \cos(v \cdot \gamma) = \pi \cdot \cos(v \cdot \gamma)$$

Also erhält man auch bei diesem Weg das Ergebnis

$$L_{ab} = \frac{8}{\pi^2} \cdot L_{ab \max} \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{v^2} \cdot \sin^2\left(v \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(v \cdot \gamma) \right] \quad (2.50)$$

Auch hier ist bei  $\gamma = 0$  die Wechselinduktivität am größten, weil die zwei Spulen maximal miteinander gekoppelt sind.

Es wird nun die Amplitude der 1. Harmonischen mit  $\hat{L}_{ab}$  bezeichnet und als Bezugs- wert verwendet.

$$\hat{L}_{ab} = \frac{8}{\pi^2} \cdot \mu_0 \cdot l \cdot \frac{w_a \cdot w_b \cdot \tau_p}{2 \cdot p \cdot \delta''} \quad (2.51)$$

$$L_{ab}(\gamma) = \hat{L}_{ab} \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2} \cdot \sin^2\left(v \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(v \gamma) \quad (2.52)$$

Für  $v = 2, 4, 6, \dots$  ist  $\cos v \gamma = 0$

Wenn man sich auf die 1. Harmonische ( $v = 1$ ) beschränkt, ergibt sich die häufig verwendete Vereinfachung

$$\boxed{L_{ab}(\gamma) = \hat{L}_{ab} \cdot \cos \gamma} \quad (2.53)$$

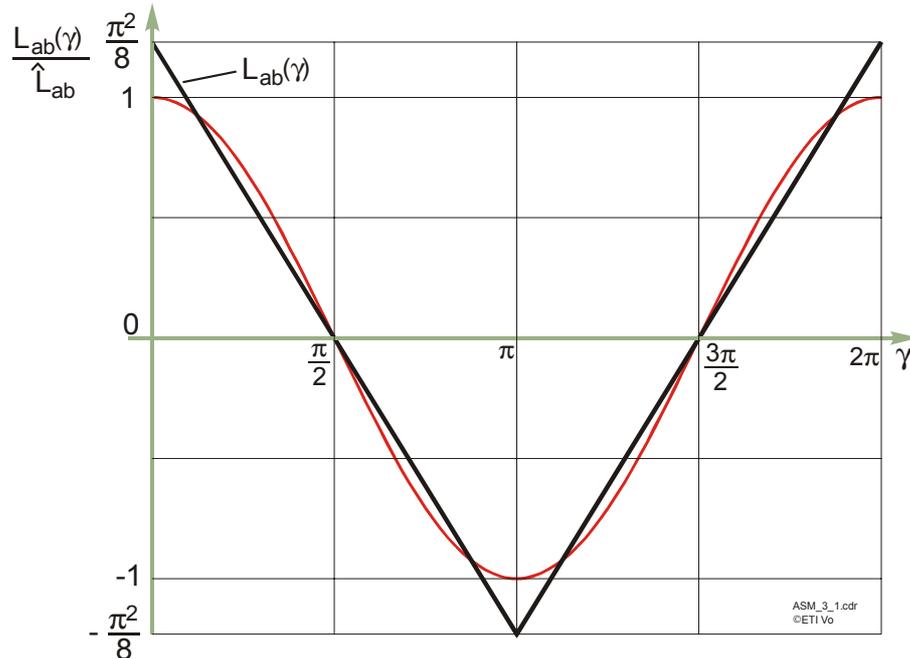


Bild 2.9: Wechselinduktivität beim Zweispulenmodell. Bezugswert ist  $\hat{L}_{ab}$  der 1. Harmonischen.

Werden bei diesem Bezugswert  $\hat{L}_{ab}$  alle Oberschwingungen berücksichtigt, so ist das Maximum

$$\hat{L}_{ab} \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2} \cdot \sin^2 \left( v \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi^2}{8} \cdot \hat{L}_{ab} \quad (2.54)$$

Bezogen auf die oben definierte Amplitude  $\hat{L}_{ab}$  der 1. Harmonischen erhält man daher (Bild 2.9)

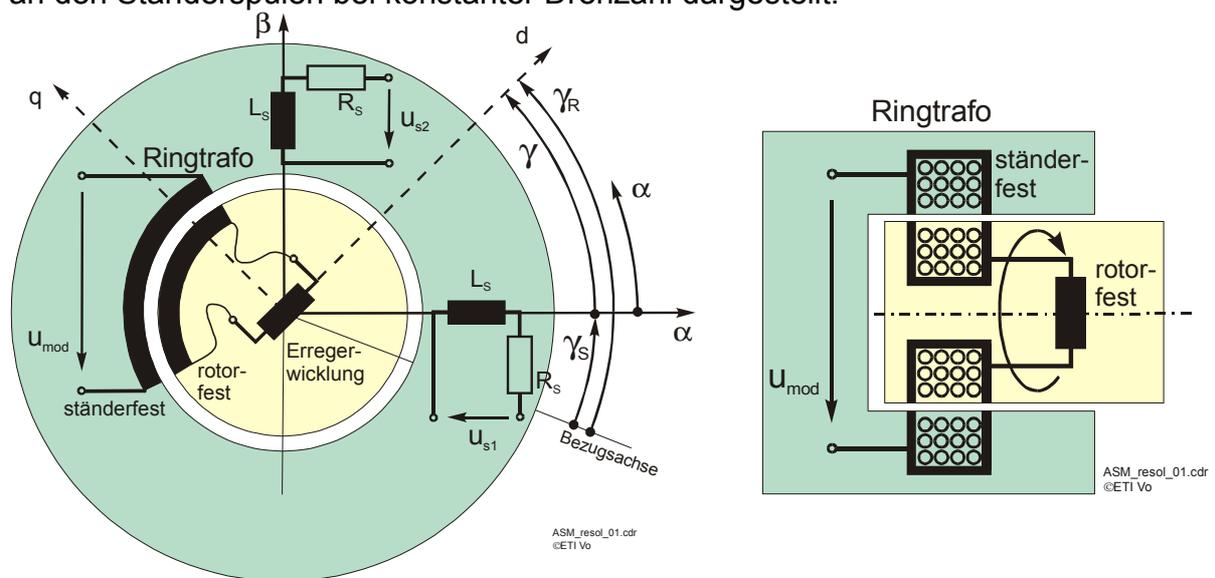
$$\frac{L_{\max}}{\hat{L}_{ab}} = \frac{\hat{L}_{ab}}{\hat{L}_{ab}} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{8} \quad (2.55)$$

#### 2.4.1 Resolver als Beispiel zum Zweispulenmodell

Ein Resolver wird verwendet um z.B. die Rotorposition bei einer el. Maschine zu messen. Es wird dazu über einen Ringtrafo ein hochfrequentes Modulationssignal mit der Kreisfrequenz  $\omega_{\text{mod}}$  in den sich drehenden Rotor eingespeist. Auf dem Rotor sitzt eine Erregerwicklung, die von der Sekundärseite des Ringtrafos gespeist wird. Die Erregerwicklung ist wie beim Zweispulenmodell mit den zwei orthogonal angeordneten, auf dem Ständer sitzenden Wicklungen verkoppelt. Wenn die Kopplung zwischen der Erregerwicklung und einer Ständerspule maximal ist, dann ist die Kopplung zwischen der Erregerwicklung und der zweiten Wicklung gerade Null. An den Klemmen der Ständerwicklungen kann dann ein mit der Cosinus- bzw. der Sinusfunktion des Positionswinkels multipliziertes hochfrequentes Signal gemessen werden.

$$\begin{bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \end{bmatrix} = U \cdot \begin{bmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{bmatrix} \cdot \cos(\omega_{\text{mod}} \cdot t) \tag{2.56}$$

Durch elektronische Auswertung der in den zwei Ständerspulen induzierten Spannungsamplituden kann damit in jeder beliebigen Position der Positionswinkel  $\gamma$  bestimmt werden. Bei Stillstand des Rotors tritt an den Klemmen der Ständerwicklungen eine zum Cosinus bzw. zum Sinus des Positionswinkel  $\gamma$  proportionale Amplituden auf. In Bild 2.11 sind die prinzipiellen Spannungsverläufe an den Ständerspulen bei konstanter Drehzahl dargestellt.



a) Prinzip eines Resolvers mit zwei orthogonalen Wicklungen. b) Übertragung des hochfrequenten (ca. 10 kHz) Modulationssignals mit Hilfe eines Ringtrafos.

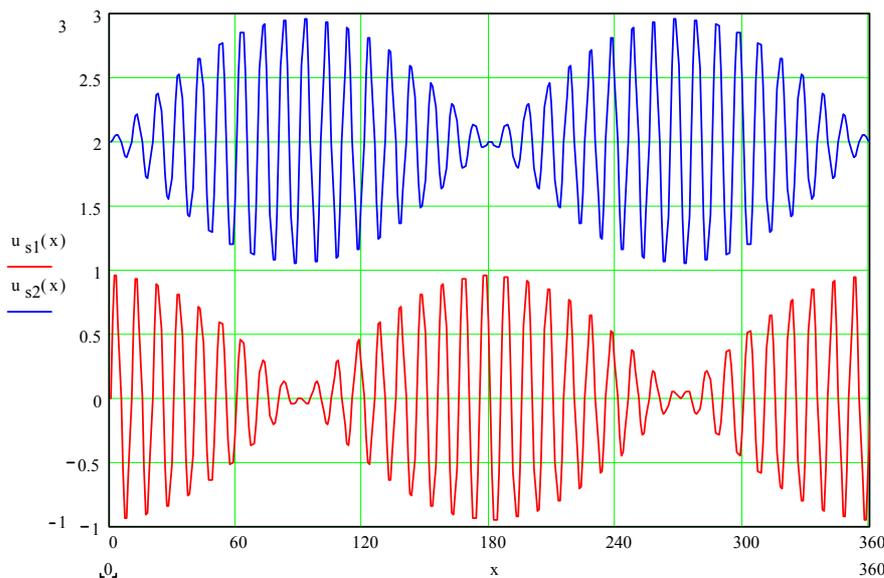


Bild 2.11: Induzierte Spannungen in den feststehenden Ständerspulen bei kontinuierlicher Drehung des Rotors ( $n=\text{konst.}$ ).

## 2.5 Luftspaltinduktivitäten bei Drehstromwicklungen

Im folgenden wird nun näher auf die Berechnung der Luftspaltinduktivitäten symmetrischer Drehstromwicklungen eingegangen.

Diese Wicklungen erzeugen bei Speisung mit einem Drehstromsystem ein in der Maschine umlaufendes Drehfeld.

Die Drehstromwicklung soll in einem gleichmäßig genuteten Stator oder Rotor mit zylindrischer Mantelfläche liegen.

### 2.5.1 Einschicht Drehstromwicklung

Bei der einfachsten – in der Praxis wenig eingesetzten – Drehstromwicklung mit Durchmesserspulen enthält jede Nut nur eine Spulenseite. Die Spulen sind als Durchmesserspulen ausgeführt und sind gemäß Bild 2.12 symmetrisch am Umfang in 6 Nuten verteilt.

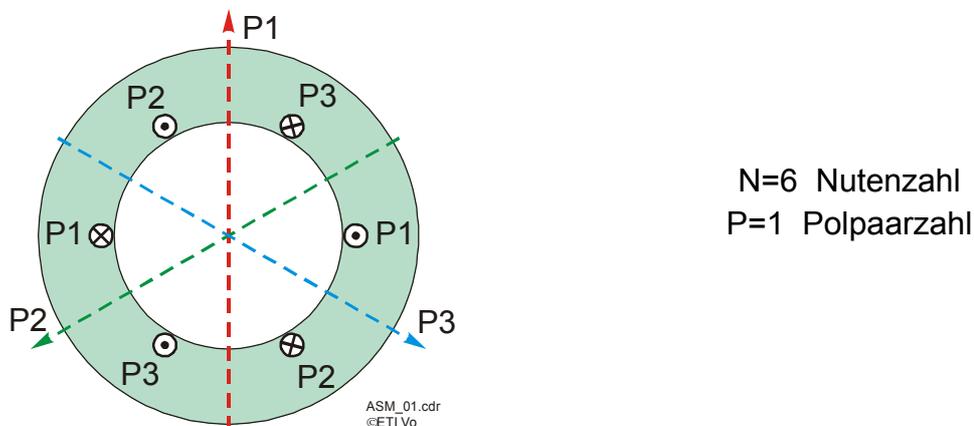


Bild 2.12: Drehstromwicklung in 6 Nuten. Die Ströme sind für alle drei Wicklungen positiv eingezeichnet

Es ergeben sich bei Erregung mit einem symmetrischen Drehstromsystem zwei Pole, dh. ist die Polpaarzahl  $p=1$ . Für die Nutenzahl pro Pol und Strang erhält man

$$q = \frac{N}{(\text{Pole}) \cdot (\text{Strangzahl})} \quad (2.57)$$

$$q = \frac{N}{2p \cdot 3} = \frac{6}{2 \cdot 3} = 1$$

In Bild 2.13 wird die Einschicht-Drehstromwicklung mit einem symmetrischen, sinusförmigen Drehstromsystem gespeist. Zum Zeitpunkt  $t=0$  sind die Momentanwerte der auf die Spitzenwerte bezogenen Ströme  $i_{p1}=1$ ;  $i_{p2}=-0,5$  und  $i_{p3}=-0,5$ . Dann ergeben sich die in Bild 2.13 dargestellten mag. Spannungen der einzelnen Stränge. Die Addition der drei mag. Spannungen ergibt eine Treppenfunktion. Zeichnet man die mag. Spannung zu anderen Zeitpunkten, ergibt sich beispielsweise zu den Zeitpunkten  $\omega t = 0; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \pi; \frac{4\pi}{3}; \dots$  immer die gleiche Gestalt, nur dass diese um den Winkel  $\omega t$

verschoben ist. Zu den Zeitpunkten  $\omega t = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}; \dots$  hat die Felderregerkurve eine andere Gestalt (in Bild 2.13 nicht eingezeichnet) wobei aber der Grundschwingungs-

gehalt gleich bleibt. Kontinuierlich betrachtet läuft die mag. Spannung und damit natürlich auch der Fluss in der Maschine mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um.

Die Treppenfunktion kann durch die 1. Harmonische, dh. eine cos-Funktion, angenähert werden ( $v_1$  in Bild 2.13).

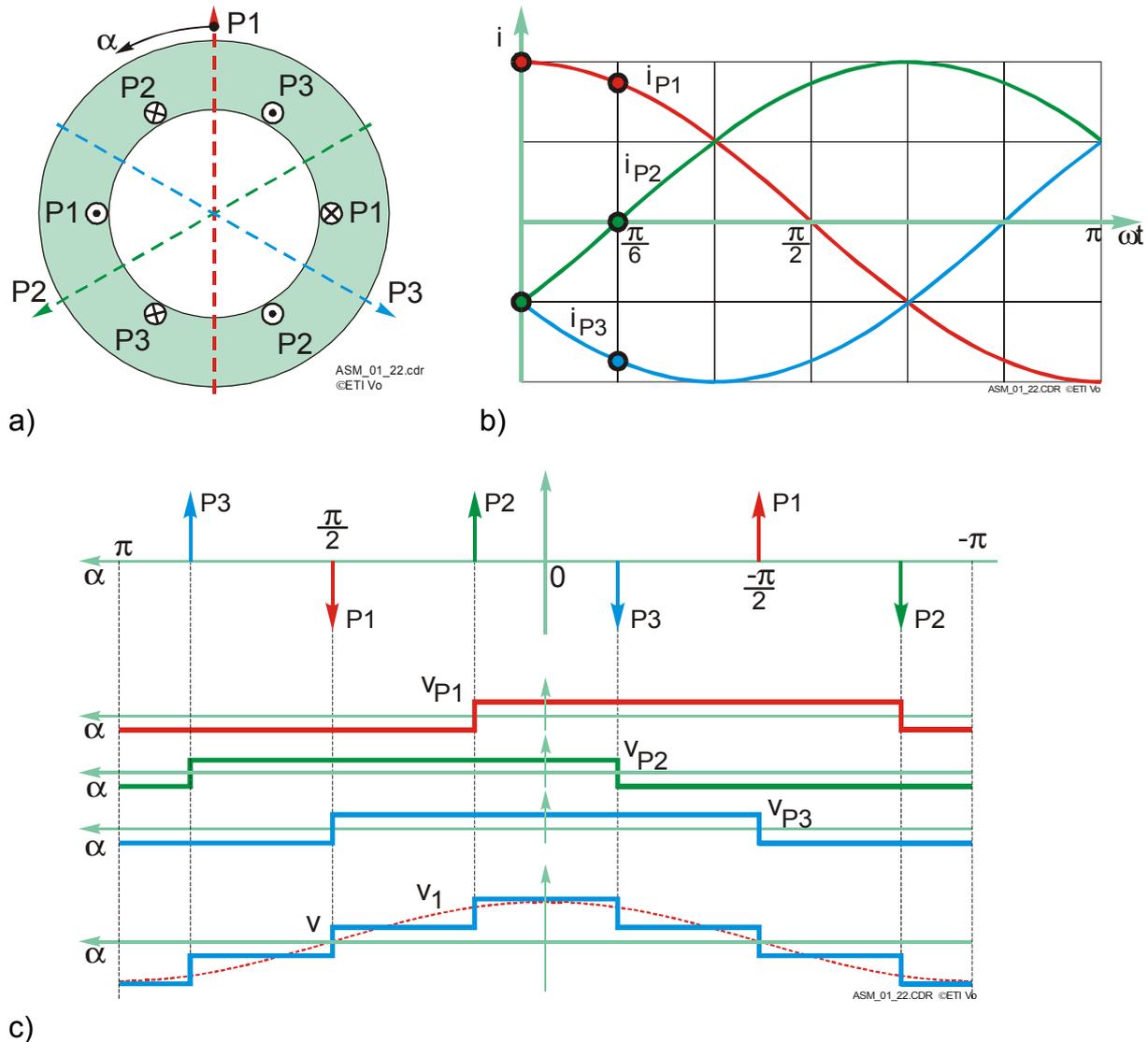


Bild 2.13: a) Lage der Durchmesserwindungen mit positiv eingezeichneten Strömen in jeder Wicklung; b) Symmetrisches Drehstromsystem ; c) Strombelagsimpulse bei positiv angenommenen Strömen in den Wicklungen mit mag. Spannung  $v_{P1}$ ;  $v_{P2}$ ;  $v_{P3}$  und der Summe  $v$  sowie der Grundschwingung  $v_1$  zum Zeitpunkt  $t=0$  .

## 2.6 Zweischicht Drehstromwicklung

Um den Fluss in der Maschine mehr sinusförmig als bei einfachen Drehstromwicklungen zu machen, werden meistens Wicklungen mit mehr als 1 Nut pro Pol und Strang verwendet ( $q > 1$ ).

Diese Wicklungen werden entweder als Einschichtwicklungen oder als gesehnte Zweischichtwicklungen, die aus Spulen gleicher Weite  $s < \tau_p$  aufgebaut sind, ausgeführt.

### 2.6.1 Ungesehnte Zweischichtwicklung

Die zu einem Polpaar gehörenden Spulenseiten werden z.B. gemäß Bild 2.14 symmetrisch auf die Wicklungsstränge verteilt. Jede der sechs Zonen der Ober- oder der Unterschicht eines Polpaares besitzt dann

$$q = \frac{N}{2pm} = \text{ganzzahlig Nuten}$$

$m$ =Strangzahl (in der Regel ist  $m=3$ )

$N$ = Gesamtzahl aller Nuten

$P$ =Polpaarzahl

Zu einem Polpaar gehören damit  $\frac{N}{p}$  Spulenseiten.

Der Nutteilung entspricht der el. Nutenwinkel

$$\alpha_n = \frac{2p\pi}{N} = \frac{\pi}{q \cdot m} = \frac{\pi}{3q}$$

Die Spulenweite  $s$  muss ein ganzzahliges Vielfaches der Nutteilung

$$\tau_n = \frac{2p\tau_p}{N} = \frac{\tau_p}{3q} \quad \text{sein.}$$

Bei der in Bild 2.14 dargestellten ungesehenen Zweischichtwicklung hat man Durchmesserpolen mit

$$s = \frac{2p \cdot \tau_p}{N} = \frac{2 \cdot 1 \cdot \tau_p}{12} = \frac{\tau_p}{6}$$

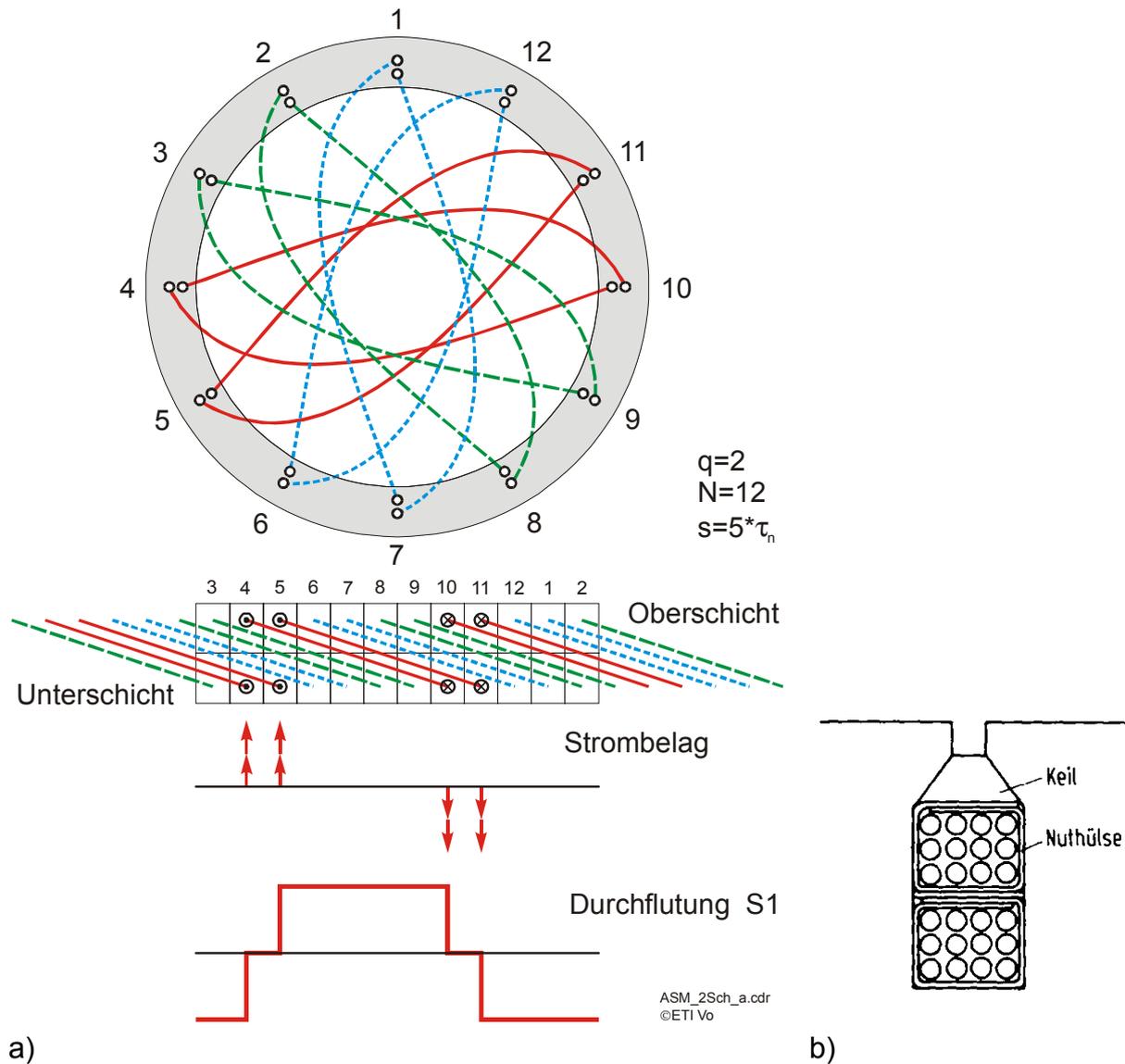


Bild 2.14: a) Ungesehnte Zweischichtwicklung mit Strombelag und Durchflutung von Strang 1. ( $N=12$ ;  $p=1$ ;  $q=2$ ;  $\tau_n = \frac{\tau_p}{6}$ ;  $\alpha_n = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{6}$ ;  $\frac{s}{\tau_p} = 6$ ), b) Nut einer Zweischichtwicklung

In Bild 2.14 sind die Strombelagsimpulse für die ungesehnte Zweischichtwicklung dargestellt. Die Durchflutung S1 ist hier wegen der Verschiebung um eine Nutteilung nicht mehr rechteckförmig sondern weist nun Lücken auf. Dies bewirkt, dass die gesamte Felderregerkurve einen der Sinusfunktion mehr angenäherten Verlauf erhält. Bei fast gleichem Wicklungsaufwand und Nutzahl erhält man aber bei der gesehnten Zweischichtwicklung eine weitere Verbesserung.

### 2.6.2 Gesehnte Zweischichtwicklung

Zur Unterdrückung bestimmter höherer Harmonischen in den Felderregerkurven der Wicklungsstränge wird die Wicklung gesehnt. Das bedeutet, dass keine Durchmesserpolen, sondern nur noch Spulen der Weite  $s < \tau_p$  verwendet werden. Um dies zu

realisieren ist der Zonenplan von Unter- und Oberschicht um  $\tau_p - s$  verschoben, wobei diese Verschiebung natürlich ein ganzzahliges Vielfaches der Nutteilung  $\tau_n$  sein muss. Oberschicht und Unterschicht sind um den el. Winkel  $(1 - s/\tau_p) \cdot \pi$  gegeneinander verschoben.

Für diese Verschiebung von Ober- und Unterschicht muss gelten

Polteilung = Spulenweite + Verschiebung

$$\tau_p = s + V$$

oder im Bogenmaß: 
$$\pi = \frac{s}{\tau_p} \cdot \pi + \frac{V}{\tau_p} \cdot \pi$$

Die Verschiebung von Ober- und Unterschicht ist dann

$$\left( \frac{V}{\tau_p} \cdot \pi \right) = \pi - \frac{s}{\tau_p} \cdot \pi = \pi \cdot \left( 1 - \frac{s}{\tau_p} \right)$$

wobei  $\frac{s}{\tau_p} = \text{Sehnungsfaktor}$  genannt wird.

$q$	1	2	3	4	5
$\alpha_n$	60°	30	20	15	12

Durch die Verschiebung von Unter- und Oberschicht werden auch die Strombelagsimpulse verschoben, so dass die Feldergerkekurve nun zwei weitere Stufen aufweist. Das Integral über eine Strombelagsfunktion der beiden Schichten sind gleich der einer Spulenseite entsprechenden Durchflutung.

$$\Theta_{p1,u} = \Theta_{p1,o} = \frac{w \cdot m}{N} \cdot i_{p1}$$

Die Feldergerkekurven für die Stränge 2 und 3 ergeben sich wegen der Symmetrie der Wicklungen durch Verschiebung der entsprechenden Kurven um den Winkel  $\frac{2\pi}{3}$

bzw.  $\frac{4\pi}{3}$ .

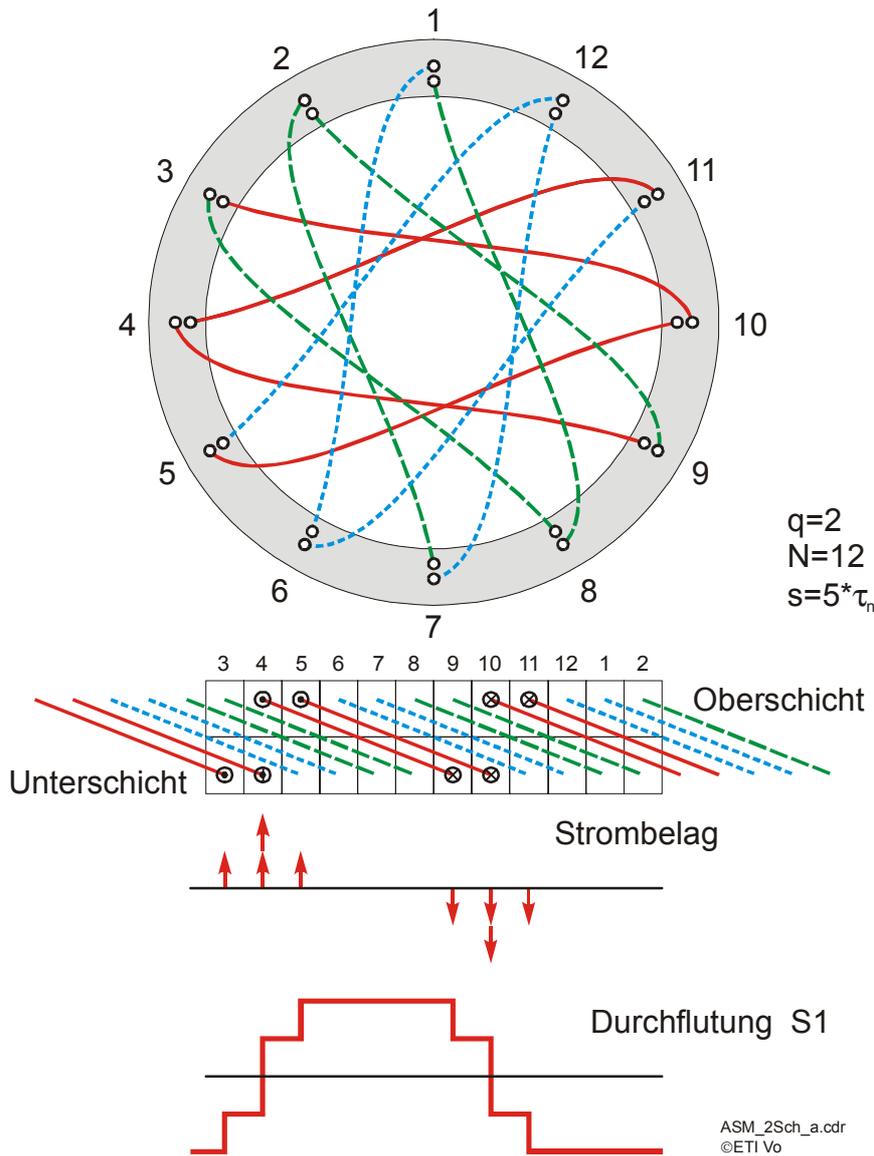


Bild 2.15: Gesehnte Zweischichtwicklung mit Strombelag und Durchflutung von Strang 1.

### 2.6.3 Beispiel zur Zweischichtwicklung

Im folgenden Beispiel wird eine Drehstromwicklung gezeigt, die bei  $p=1$  und  $N=18$  Nuten untergebracht ist. Die Daten für diese Wicklung sind:

Polpaarzahl	$p = 1$
Nutenzahl	$N = 18$
Nuten/Pol. Strang	$q = 3$
Nutteilung	$\tau_n = \frac{\tau_p}{3 \cdot q} = \frac{\tau_p}{9}$
	$\tau_p = 9 \cdot \tau_n$

	$s / \tau_p = 8 / 9$
Spulenweite	$s = 8 \cdot \tau_n$
Polteilung	$\tau_p = \frac{\pi \cdot s}{2 \cdot p}$
el. Nutenwinkel	$\alpha_n = \frac{360^\circ}{3 \cdot q} = 20^\circ$
$1 - \frac{s}{\tau_p} = \frac{8}{9}$	$\left(1 - \frac{s}{\tau_p}\right) \cdot \pi \hat{=} 20^\circ$

Hier ist wegen  $p=1$  der räumliche Winkel gleich dem elektrischen.

Der Nutenwinkel ist  $(1 - s / \tau_p) \pi \hat{=} 20^\circ$

Die Durchflutung  $w \cdot i_{p1}$  einer Spulenseite teilt sich auf  $\frac{N}{3}$  Nuten. Daher ist die

Durchflutung einer Schicht ( $q = \frac{N}{2p \cdot 3}$ ):

$$\Theta_{p1o} = \Theta_{p1u} = \frac{w \cdot i_{p1}}{N/3} = \frac{w \cdot 3 \cdot 2}{N \cdot 2} i_{p1} = \frac{w \cdot i_{p1}}{2 \cdot p \cdot q}$$

Die Integration eines Strombelagsimpulses an der Stelle  $\alpha_0$  ergibt:

$$\frac{\tau_p}{\pi} \int \frac{w \cdot i_{p1}}{3pq} \cdot \frac{\pi}{\tau_p} \cdot \delta(\alpha - \alpha_0) d\alpha = \frac{w \cdot i_{p1}}{2pq} \cdot \sigma(\alpha - \alpha_0) + C \quad (2.58)$$

$w$  = Windungszahl eines Stranges

Die Felderreggerkurve eines Stranges besitzt in diesem Beispiel nun 5 verschiedene Level (Bild 2.17), wodurch einerseits die Sinusform gut angenähert werden kann und andererseits je nach Wicklungsparameter auch bestimmte Oberschwingungen in der Felderreggerkurve verschwinden.

Die Fourieranalyse eines Stranges kann mit Hilfe von überlagerten Rechteckfunktionen durchgeführt werden, was aber an dieser Stelle nicht explizit gezeigt wird. Das Ergebnis der Fourieranalyse eines Stranges ist:

$$v_{p1}(\alpha, t) = i_{p1}(t) \cdot \frac{2w}{p\pi} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot \xi_{\lambda} \cdot \cos(\lambda\alpha) \quad (2.59)$$

wobei sich wie üblich der Wicklungsfaktor  $\xi_{\lambda}$  aus Zonenfaktor, Sehnungsfaktor und einem von der Ordnungszahl der Oberschwingung abhängigen Vorzeichen zusammensetzt.

$$\xi_{\lambda} = \underbrace{\frac{\sin(\lambda q \alpha_n / 2)}{q \cdot \sin(\lambda \alpha_n / 2)}}_{\text{Zonenfaktor}} \cdot \overbrace{\sin\left(\lambda \frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{\tau_p}\right)}^{\text{Sehnungsfaktor}} \cdot \underbrace{\sin^2\left(\lambda \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{Vorzeichen}} \quad \text{Wicklungsfaktor} \quad (2.60)$$

Der Wicklungsfaktor beschreibt die Geometrie der Wicklung und setzt sich aus dem Zonenfaktor, dem Sehnungsfaktor und einem Vorzeichen zusammen.

$$\frac{\sin(\lambda q \alpha_n / 2)}{q \cdot \sin(\lambda \alpha_n / 2)} = \text{Zonenfaktor} \quad (2.61)$$

$$\sin\left(\lambda \frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{\tau_p}\right) = \text{Sehnungsfaktor} \quad (2.62)$$

Untersucht man den Wicklungsfaktor  $\xi_{\lambda}$  als Funktion der Ordnungszahl  $\lambda$ , so stellt man fest, dass alle geradzahigen Harmonischen in der Felderreggerkurve verschwinden.

$$q=1; \frac{s}{\tau_p}=1: \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} \lambda & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ \hline \xi_\lambda & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \dots \end{array}$$

Dabei bilden die Harmonischen 3, 7, 11,... linksdrehende und die Harmonischen 5, 9, 13, ... rechtsdrehende Drehstromsysteme.

Für die erste Harmonische ( $\lambda=1$ ) erhält man

$$v_{p1} = i_{p1} \cdot \frac{2 \cdot w \cdot \xi_1}{p \cdot \pi} \cdot \cos \alpha \quad (2.63)$$

Negative Wicklungsfaktoren bedeuten, dass für die entsprechende Harmonische die Amplitude negativ zu zählen ist.

Nach Gl.(2.62) kann die Sehnung  $\frac{s}{\tau_p}$  so gewählt werden, dass auch eine bestimmte

ungeradzahlige Harmonische der Felderregerkurve verschwindet oder zumindest reduziert wird. Die Bedingung zum Verschwinden lautet:

$$\sin\left(\lambda \frac{\pi \cdot s}{2 \cdot \tau_p}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda \frac{\pi \cdot s}{2 \cdot \tau_p} = g \cdot \pi \quad \text{mit } g = \{1; 2; 3; \dots\} \quad \text{also}$$

$$\frac{s}{\tau_p} = \frac{2 \cdot g}{\lambda}$$

Mit der Forderung  $s < \tau_p$  für die gesehnte Zweischichtwicklung wird z.B.:

$\lambda = 5$	$s / \tau_p = 4 / 5$	$g = 2$
$\lambda = 7$	$s / \tau_p = 6 / 7$	$g = 3$

Für  $\lambda = \text{gerade}$  ist  $\xi_\lambda = 0$ . Die Harmonischen mit durch 3 teilbarer Ordnung  $\lambda$  bilden bei einer Drehstromwicklung kein resultierendes Feld, wenn die Nullkomponente der Ströme verschwindet ( $i_{p1} + i_{p2} + i_{p3} = 0$ ).

Realisierbar sind aber nur Sehnungen mit Spulenweiten  $s$ , die ein ganzzahliges Vielfaches der Nutteilung  $\tau_n$  sind. Bei dem in Bild 2.17 dargestellten Beispiel ergeben sich für den Sehnungs-, Zonen- und den Wicklungsfaktor die in folgender Tabelle dargestellten Werte:

$\lambda$	1	3	5	7	9	11	13
$\sin\left(\lambda \cdot \frac{\pi \cdot 8}{2 \cdot 9}\right)$	0,9848	-0,8660	0,6428	-0,3420	0	0,3420	-0,6428
$\frac{\sin(\lambda\pi/6)}{3 \cdot \sin(\lambda\pi/18)}$	0,9598	0,6667	0,2176	-0,1774	-0,3333	-0,1774	0,2176
$\xi_\lambda$	0,9452	-0,5774	0,1399	0,0607	0	-0,0607	-0,1398

Durch die Sehnung der Wicklungen geht natürlich auch die Amplitude der 1. Harmonischen in der Felderregerkurve zurück wie das in Bild 2.16 dargestellt ist. Die Wahl der Sehnung ist deshalb ein Kompromiss zwischen kleinerer Grundschwingung und reduzierten Oberschwingungen.

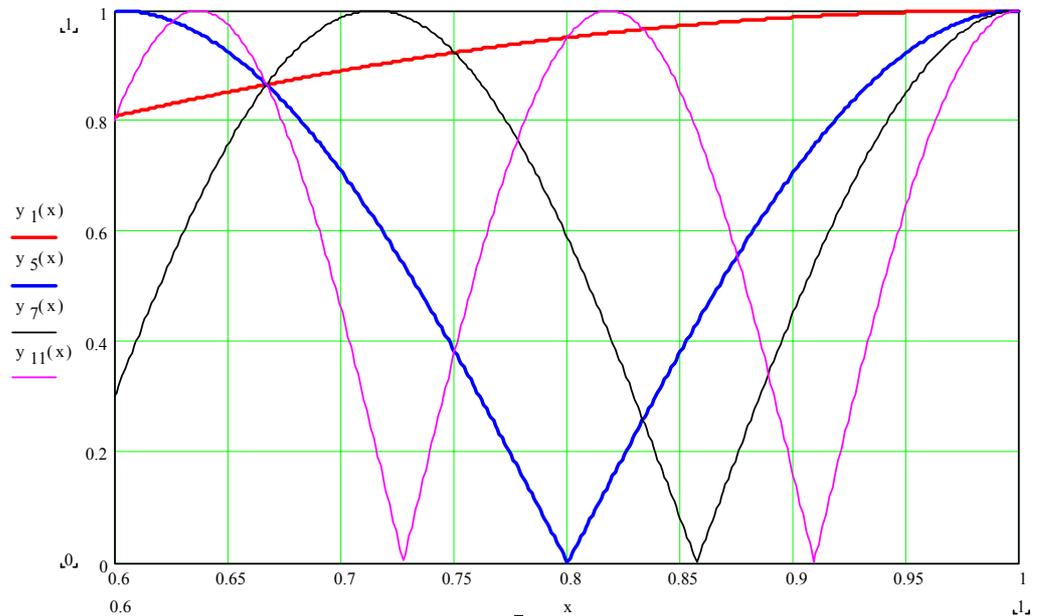


Bild 2.16: Betrag des Sehnungsfaktors  $s/\tau_p$  für  $\lambda = \{1; 5; 7; 11\}$ . Realisierbar ist z.B.

$$\frac{s}{\tau_p} = \frac{5}{7} = 0,714 \quad \text{oder} \quad \frac{s}{\tau_p} = \frac{8}{9} = 0,889 .$$

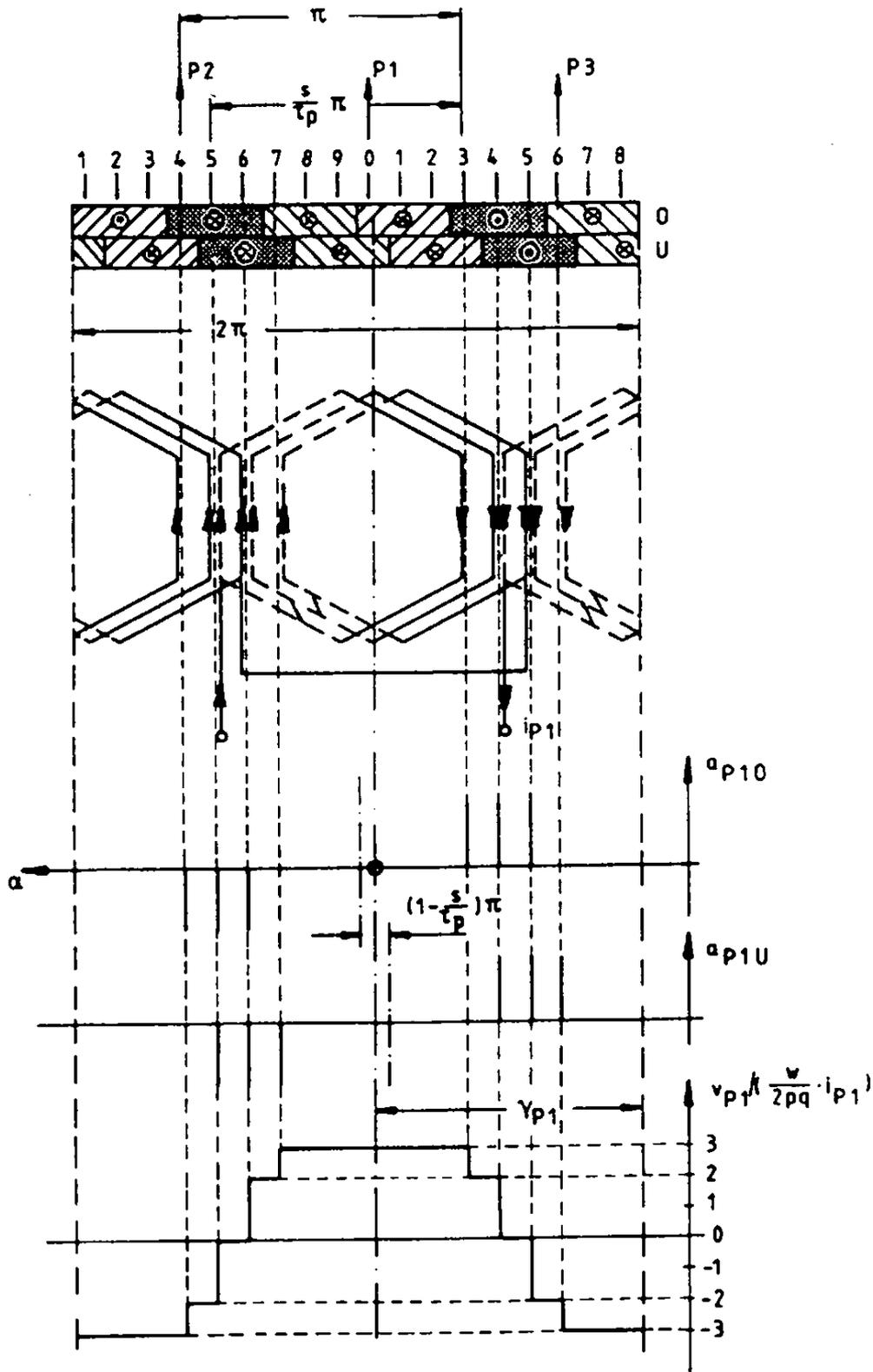


Bild 2.17: Dreisträngige, gesehte Zweischichtwicklung mit Strombelag und Durchflutung von Strang 1.  $N=18$ ;  $p=1$ ;  $q=3$ ;  $\tau_n = \tau_p/9$ ;  $\alpha_n = 20^\circ$ ;  $s/\tau_p = 8/9$ ;  $s = 8 \cdot \tau_n$

### 2.6.4 Definition der wirksamen Windungszahl

Das Produkt aus tatsächlicher Windungszahl der Spule und dem Wicklungsfaktor  $\xi_1$  der 1. Harmonischen kann man als die wirksame Windungszahl  $w \cdot \xi_1$  einer Vergleichs-Durchmesserspule auffassen, die bei gleichem Strom die gleiche 1. Harmonische der Felderreggerkurve liefert.

## 2.7 Wechselinduktivität zwischen zwei Strängen

Oft benötigt man die Wechselinduktivität zwischen zwei Wicklungssträngen a und b, wobei im allgemeinen sich der eine Strang auf dem Stator und der andere auf dem Rotor befindet. Für diesen allgemeinen Fall werden die symmetrischen dreisträngigen Zweischichtwicklungen gleicher Polpaarzahl mit den Indizes P und Q bezeichnet. Der Ersatzluftspalt  $\delta''$  soll konstant sein. In Bild 2.18 ist die relative Lage der Strangachsen von  $P_a$  und  $Q_b$  relativ zu einer willkürlich angenommenen Bezugsachse eingezeichnet.

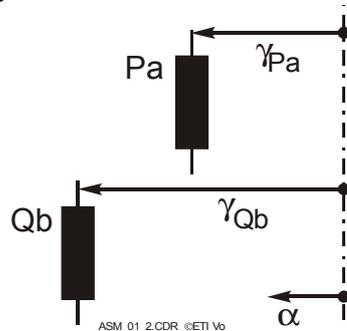


Bild 2.18: Definition der Winkel zwischen zwei Wicklungssträngen  $P_a$  und  $Q_b$ .

Die Felderreggerkurve bzw. die Geometriefunktionen der Stränge  $P_a$  und  $Q_b$  ergeben sich analog zu Gl.(2.46) bzw. Gl.(2.47).

$$g_{P_a}(\alpha, t) = \frac{2 \cdot w_P}{p \cdot \pi} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot \xi_{P\lambda} \cdot \cos \lambda(\alpha - \gamma_{P_a}) \quad \text{und} \quad (2.64)$$

$$g_{Q_b}(\alpha, t) = \frac{2 \cdot w_Q}{p \cdot \pi} \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot \xi_{Q\mu} \cdot \cos \mu(\alpha - \gamma_{Q_b}) \quad (2.65)$$

Entsprechend der bisherigen Vorgehensweise werden die Geometriefunktionen wieder in die Gl.(2.22) eingesetzt, so dass man für die Wechselinduktivität

$$L_{P_a, Q_b} = \frac{4\mu_0 l \tau_p \cdot w_P w_Q}{\pi^2 \cdot p \delta''} \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2} \cdot \xi_{Pv} \cdot \xi_{Qv} \cdot \cos v(\gamma_{P_a} - \gamma_{Q_b}) \quad \text{erhält.} \quad (2.66)$$

$\xi_{Pv}$  und  $\xi_{Qv}$  sind dabei die nach Gl.(2.60) definierten Wicklungsfaktoren. Um die Eigeninduktivität einer Wicklung aus dieser allgemeinen Gleichung zu ermitteln, ersetzt man den Index P durch Q oder umgekehrt.

Aus dem Ergebnis erkennt man, dass für die Wechselinduktivität  $L_{P_a, Q_b}$  nur die Winkeldifferenz zwischen den beiden Wicklungen eine Rolle spielt.

$(\gamma_{Pa} - \gamma_{Qb})$  ist die el. Winkeldifferenz zwischen den Achsen der beiden Stränge  $P_a$  und  $Q_b$ . Sie ist dann zeitlich veränderlich, wenn einer der beiden Stränge dem Stator und einer dem Rotor angehört und der Rotor sich dreht. Bei Wicklungen, die sich gemeinsam auf dem Stator oder Rotor befinden ist die Winkeldifferenz konstant. Ein oft benötigter Wert ist die Winkeldifferenz  $\gamma_{Pa} - \gamma_{Qb} = 120^\circ$ . Für diesen Fall ist die Kopplung der beiden Spulen wegen  $\cos 120^\circ = -0,5$  halb so groß wie das Maximum und negativ.

Für  $(\gamma_{Pa} - \gamma_{Qb}) = (2g - 1)\pi/2$  ist  $L_{Pa, Qb} = 0$ , d.h. bei orthogonaler Stellung der Stränge zueinander liegt vollständige Entkopplung vor. Extreme Kopplung herrscht bei  $(\gamma_{Pa} - \gamma_{Qb}) = g\pi$  (Vorzeichenwechsel).

In der Regel beschränkt man sich bei der Berechnung von den Wechselinduktivitäten auf die 1. Harmonische ( $\nu = 1$ ) und erhält dann:

$$L_{Pa, Qb} = \frac{4\mu_0 l \tau_p}{\pi^2 \cdot p \delta''} \cdot w_P \xi_{P1} \cdot w_Q \xi_{Q1} \cdot \cos(\gamma_{Pa} - \gamma_{Qb}) \quad (2.67)$$

Liegt Nutschrägung eines Maschinenteils vor, dann tritt zu den Wicklungsfaktoren noch der Schrägungsfaktor hinzu

## 2.8 Nutschrägung

Eine weitere Reduktion von Oberschwingungen erhält man, wenn man den Strombelag nicht als  $\delta$ -Impuls an einer Stelle, sondern als Rechteckblock aufbringen kann. Die Integration über den Winkel gibt dann prinzipiell eine linear ansteigende oder abfallende Funktion. Realisieren lässt sich diese Forderung dadurch, dass man die Nuten nicht parallel zur Drehachse, sondern schräg im Stator oder Rotor anordnet. Wegen der schwierigeren Wicklung wird vor allem bei kleineren Maschinen immer nur der Rotor geschrägt (Bild 2.20). Die Nuten laufen dabei über die aktive Maschinenlänge  $l$  und sind an den Stirnseiten um den el. Winkel  $2p$  versetzt. Den Winkel  $p$  nennt man den Schrägungswinkel.

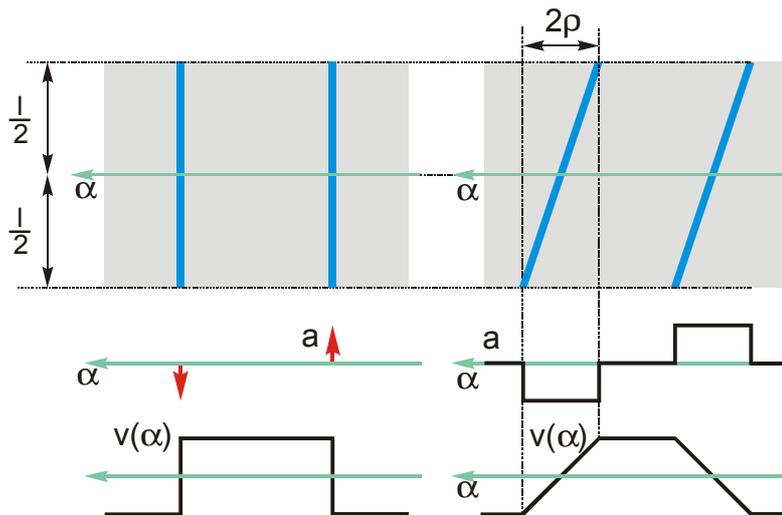


Bild 2.19: Abwicklung; Prinzipieller Strombelag und Felderregerkurve bei ungeschägten und geschägten Nuten.



Bild 2.20: Rotor einer Asynchronmaschine mit geschägten Nuten.

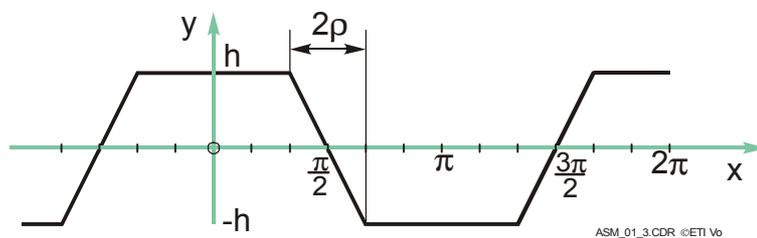


Bild 2.21: Allgemeine Trapezfunktion.

Die Fourierzerlegung einer allgemeinen Trapezfunktion nach Bild 2.21 lautet:

$$f(x) = \frac{4 \cdot h}{\rho \cdot \pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \sin(k \cdot \rho) \cdot \cos(k \cdot x) \quad (2.68)$$

Wegen dem Schrägungswinkel  $\rho$  tritt in der Fourierzerlegung der Faktor  $\frac{\sin(k \cdot \rho)}{k \cdot \rho}$

auf, den man bei der Anwendung den Schrägungsfaktor  $\chi$  nennt.

Für  $\rho \rightarrow 0$ , dh. ungeschrägte Nuten, ist der Grenzwert nach de L'Hospital zu bilden.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(k \cdot \rho)}{k \cdot \rho} \right\} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \frac{k \cdot \cos(k \cdot \rho)}{k} \right\} = 1$$

Man erhält in diesem Grenzfall bei ungeschägten Nuten dann die Fourierzerlegung der Rechteckfunktion.

Angewandt auf die Wicklungen in Bild 2.18 ergibt sich der Schrägungsfaktor

$$\chi_v = \frac{\sin(v \cdot (\rho_p - \rho_q))}{v \cdot (\rho_p - \rho_q)} \quad (2.69)$$

Wobei  $\rho_p$  der Schrägungswinkel des Stranges P und  $\rho_q$  der Schrägungswinkel des Stranges Q ist.

Bei der Wechselinduktivität  $L_{ab}$  tritt daher neben dem Wicklungsfaktor  $\xi$  noch der Schrägungsfaktor  $\chi$  multiplikativ hinzu.

Normalerweise wird herstellungstechnisch der Rotor um etwa eine Statornutteilung geschragt. Um Oberschwingungen der Ordnungszahl  $v$  in der Felderregerkurve zum Verschwinden zu bringen muss gelten

$$v \cdot (\rho_p - \rho_q) = g \cdot \pi \quad (2.70)$$

Die Schrägung wirkt sich auch auf die in der Maschine induzierte Spannung in der Art positiv aus, dass weniger oder zumindest um den Schrägungsfaktor reduzierte Amplituden der Oberschwingungen auftreten.

Oberschwingungen aus





### 3 Systemgleichungen

In diesem Abschnitt werden die Systemgleichungen für die Drehstrom-Asynchronmaschine mit Hilfe der oben zur Verfügung gestellten Hilfsmittel hergeleitet.

#### 3.1 Systemgleichungen der Drehstromasynchronmaschine mit Schleifringläufer

Es wird wegen der Allgemeingültigkeit zunächst der Schleifringläufer betrachtet. Im Ständer ist eine symmetrische Drehstromwicklung vorhanden. Es wird eine zunächst frei wählbare Bezugsachse für die Winkel eingeführt, bezüglich der der Rotorwinkel  $\gamma_R$  und der Ständerwinkel  $\gamma_S$  gezählt werden. Die Differenz der beiden Winkel ist der zeitabhängige Winkel  $\gamma$ . Die Winkel  $\gamma$  seien alle elektrische Winkel.

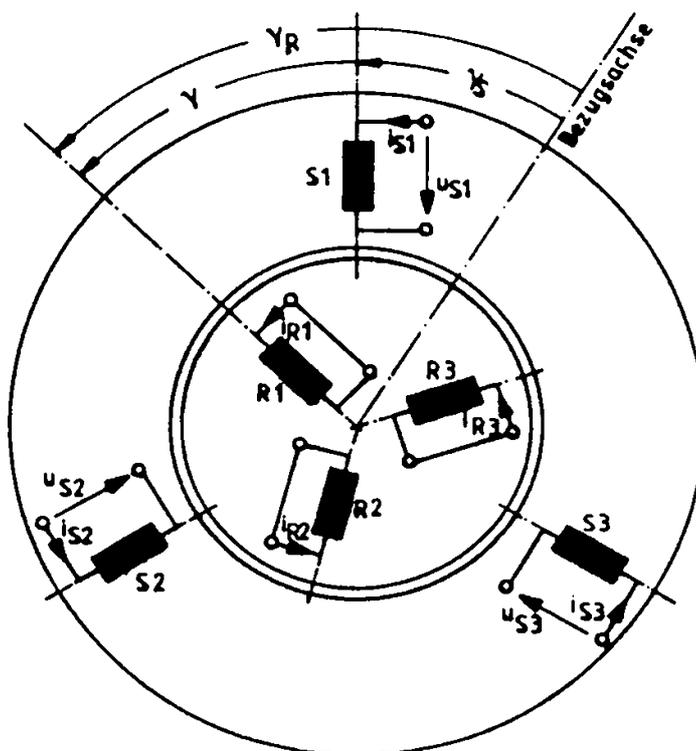


Bild 3.1: Definition der Winkel bei der allgemeinen Asynchronmaschine.

Die aus dem Ersatzschaltbild resultierenden 6 Spannungsgleichungen für Ständer und Rotorkreise sind:

$$\begin{bmatrix} u_S \\ u_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S & 0 \\ 0 & R_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (L_{SS}) + (S_S) & (L_{SR}) \\ (L_{SR})^T & (L_{RR}) + (S_R) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$L$  sind Luftspaltinduktivitäten und  $S$  Stirn- und Nutfeldinduktivitäten. Nur die Elemente von  $(L_{SR})$  sind vom Rotorpositionswinkel  $\gamma$  abhängig, da es sich um die Wechselinduktivitäten zwischen den Stator- und den Rotorsträngen handelt. Sämtliche  $L$  lassen sich mit der in Kapitel 2 für  $L_{Pa,Qb}$  hergeleiteten Formel berechnen. Für die von  $\gamma$  abhängigen Induktivitäten wird zur Vereinfachung nur die 1. Harmonische ( $\nu=1$ ) berücksichtigt.

### 3.1.1 Induktivitätsmatrix $L_{SS}$

Die  $(L_{SS})$  besteht aus den konstanten Eigen- und Wechselinduktivitäten der drei Ständerwicklungen und aus den Streuinduktivitäten, die oben nicht explizit hergeleitet wurden. Die Faktoren  $-1/2$  beruhen auf dem Drehwinkel  $120^\circ$  zwischen den Wechselinduktivitäten.

$$(L_{SS}) = L_S \cdot \begin{bmatrix} 1 + \sigma_{Sii} & -\frac{1}{2} + \sigma_{Sik} & -\frac{1}{2} + \sigma_{Sik} \\ -\frac{1}{2} + \sigma_{Sik} & 1 + \sigma_{Sii} & -\frac{1}{2} + \sigma_{Sik} \\ -\frac{1}{2} + \sigma_{Sik} & -\frac{1}{2} + \sigma_{Sik} & 1 + \sigma_{Sii} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Für das erste Element  $L_{S1,S1}$  von  $(L_{SS})$  gilt beispielsweise mit

$$L_{S1,S1} = c \cdot \underbrace{w_S^2 \xi_{S1}^2 \cdot \frac{1}{1^2}}_{\text{Grundschwingung}} + c \cdot w_S^2 \underbrace{\sum_{\gamma=2}^{\infty} \left( \frac{\xi_{S\gamma}}{\gamma} \right)^2}_{\text{Rest}}$$

Die Grundschwingung wird ausgeklammert und als  $L_S$  bezeichnen.

$$L_{S1,S1} = L_S \left( 1 + \sum_{\gamma=2}^{\infty} \left( \frac{\xi_{S\gamma}}{\xi_{S1} \cdot \nu} \right)^2 \right) = L_S \cdot \left( 1 + \underbrace{\sigma_{Sii}}_{\ll 1} \right) \quad (3.3)$$

Entsprechend sind die anderen zwei Elemente der Hauptdiagonale zu behandeln.

Für das Element  $L_{S1,S2}$  von  $(L_{SS})$  gilt beispielsweise mit

$$L_{S1,S2} = c \cdot w_S^2 \cdot \underbrace{\xi_{S1}^2 \cdot \cos \frac{2\pi}{3}}_{\text{1. Harmonische}} + \sum_{\gamma=2}^{\infty} c \cdot w_S^2 \cdot \underbrace{\left( \frac{\xi_{S1}}{\gamma} \right)^2 \cdot \cos \gamma \frac{2\pi}{3}}_{\text{Rest}}$$

$$L_{S1,S2} = L_S \left( -\frac{1}{2} + \sum_{\gamma=2}^{\infty} \left( \frac{\xi_{S\gamma}}{\xi_{S1} \cdot \nu} \right)^2 \cdot \cos \gamma \frac{2\pi}{3} \right) = L_S \cdot \left( 1 + \underbrace{\sigma_{Sik}}_{\ll 1} \right) \quad (3.4)$$

Wegen gleichem Winkel (je  $120^\circ$  weiter) sind alle  $\sigma_{Sik}$  gleich.

Die Matrix  $(L_{SS})$  ist zyklisch und symmetrisch. Diese Eigenschaft wird später bei der Transformation der Systemgleichungen eine entscheidende Rolle spielen.

$$L_S = \frac{4 \cdot \mu_0 \cdot \tau_p}{\pi^2 p \cdot \delta'''} (w_S \xi_{S1})^2 \quad \text{und die Streuungen}$$

$$\sigma_{Sii} = \sum_{\nu=2}^{\infty} \left( \frac{\xi_{S\nu}}{\nu \xi_{S1}} \right)^2 \ll 1 \quad \text{sowie} \quad \sigma_{Sik} = \sum_{\nu=2}^{\infty} \left( \frac{\xi_{S\nu}}{\nu \xi_{S1}} \right)^2 \cos \nu \frac{2\pi}{3} \ll \sigma_{Sii}$$

### 3.1.2 Induktivitätsmatrix $L_{SR}$

Wie bei der Herleitung des Drehmoments schon abgeleitet, ergibt sich nur ein Drehmoment, wenn sich die Induktivität bei einer Bewegung ändert. Deshalb wird der

winkelabhängigen Matrix ( $L_{SR}$ ) eine entscheidende Rolle bei der Erzeugung des Drehmoment zufallen.

Wie üblich beschränkt man sich auch bei der Wechselinduktivität auf die erste Harmonische ( $\gamma=1$ ) und vernachlässigt die Streuung. Nur dann wird das Gleichungssystem noch einigermaßen übersichtlich und lösbar.

$$L_{S1,R1} = \underbrace{c \cdot w_S \cdot w_R \cdot \xi_{S1} \xi_{R1}}_{L_{SR}} \cdot \cos \gamma + 0 = L_{SR} \cdot \cos \gamma \quad (3.5)$$

Durch Anwendung auf die restlichen Elemente erhält man

$$(L_{SR}) = L_{SR} \cdot \begin{bmatrix} \cos \gamma & \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\gamma + \frac{4\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\gamma + \frac{4\pi}{3}\right) & \cos \gamma & \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\gamma + \frac{4\pi}{3}\right) & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$L_{SR} = \frac{4\mu_0 l \cdot \tau_p}{\pi^2 p \delta''} \cdot w_S \xi_{S1} \cdot w_R \xi_{R1} \cdot X_1 \quad \text{ohne Schrägung: } X_1 = 1$$

Diese Matrix ist nur zyklisch.

( $S_S$ ) hat gleiche Struktur wie ( $L_{SS}$ ), weil Spulen konstant  $120^\circ$   $\sphericalangle$ -Abstand haben.

### 3.1.3 Induktivitätsmatrix $L_{RR}$

Die Matrix ( $L_{RR}$ ) ist analog zu ( $L_{SS}$ ) aufgebaut.

### 3.1.4 Stirn- und Nutfeldinduktivitäten

Die Stirn- und Nutfeldinduktivitäten werden wie ( $L_{SS}$ ) und ( $L_{RR}$ ) als zyklische und symmetrische Matrizen angesetzt:

$$(S_S) = \begin{bmatrix} S_{Sii} & S_{Sik} & S_{Sik} \\ S_{Sik} & S_{Sii} & S_{Sik} \\ S_{Sik} & S_{Sik} & S_{Sii} \end{bmatrix} \quad (S_R) \text{ ist analog aufgebaut.}$$

### 3.1.5 Widerstandsmatrizen

Die Widerstandsmatrizen haben wegen der galvanischen Trennung der Stränge Diagonalform:

$$(R_S) = \begin{bmatrix} R_S & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 \\ 0 & 0 & R_S \end{bmatrix} \quad (R_R) \text{ ist analog aufgebaut.}$$

### 3.2 Lösbarkeit des Gleichungssystems

Nachdem nun alle Induktivitäten vom Prinzip her bekannt sind, kann man sich fragen unter welchen Bedingungen das Gleichungssystem lösbar ist. Das Spannungssystem bildet ein Gleichungssystem mit 6 Unbekannten.

Man erhält ein

- lineares, zeitinvariant System wenn  $\gamma = const.$ . Bei  $\gamma = const.$  steht der Rotor still. Dies ist z.B. bei einer Asynchronmaschine mit Schleifringläufer der Fall, die als Transformator benutzt wird.
- lineares, zeitvariantes System, wenn  $\gamma(t)$  gegeben ist. Dieser Fall ist bei gegebener Drehbewegung oder konstanter Drehzahl vorhanden
- nichtlineares System 7. Ordnung, wenn  $\gamma$  unbekannt ist. Der unbekannte Winkel muss durch die mechanische Gleichung bestimmt werden.

Im dritten Fall muss die Gleichung für das innere Drehmoment und die mechanische Gleichung mit hinzugenommen werden. Die Drehmomentengleichung stellt den Zusammenhang mit den el. Größen her.

Das innere Drehmoment ist bestimmt durch

$$M_{in} = \frac{1}{2} p \cdot (i)^T \cdot \frac{d(L)}{d\gamma} \cdot (i) = p \cdot (i_S)^T \cdot \frac{d(L_{SR})}{d\gamma} \cdot (i_R) \quad (3.7)$$

Zur Lösung wird die mech. Gleichung benötigt.

$$M_i = \frac{J}{p} \cdot \ddot{\gamma} + M_L \quad (3.8)$$

Damit ist die Asynchronmaschine vollständig mathematisch beschrieben.

Da die System-Untermatrizen alle zyklisch und zum Teil zusätzlich noch symmetrisch sind, kann man die Systemgleichungen mittels einer Variablen-Transformation vereinfachen. Zunächst wird der Formalismus einer leistungsvarianten Transformation allgemein demonstriert.

### 3.3 Begründung für Variablentransformation

Zur übersichtlichen Berechnung soll eine Variablentransformation erfolgen. Wie das im Einzelnen vonstatten geht wird im nächsten Kapitel ausführlich gezeigt. Gründe für die Variablentransformation sind:

- $(L_{SR})$  sind winkelabhängig. Dieses Problem kann durch die Wahl eines geeigneten Bezugssystems (Bezugsachse) behoben werden.
- Beispiel hat gezeigt, dass der Fluss auch in der Ebene z.B. durch Vektoren darstellbar ist. Dabei bietet die komplexe Darstellung besondere Vorteile.
- Man erhält ein Ersatzschaltbild wie beim Trafo mit den entsprechenden Übersetzungsverhältnissen zwischen Stator und Rotor.

- Die Transformation soll sein leistungsinvariant sein, was bedeutet, dass die Leistung im Originalsystem und im transformierten System ohne Vorfaktoren berechnet werden kann.

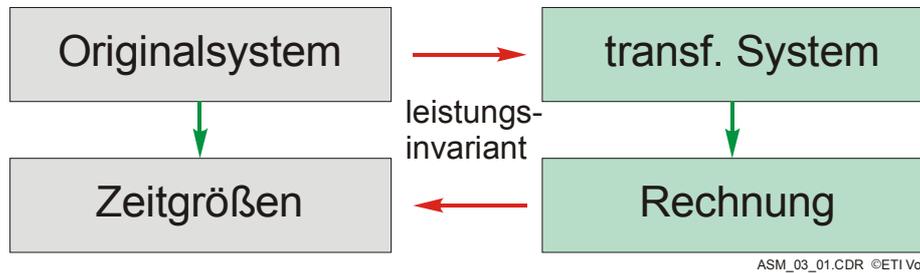


Bild 3.2: Variablentransformation zur leichten Berechnung der Größen.





## 4 Leistungsvariante Transformation

Leistungsvariante Transformation

Schrittweise 3 Transformationen

- Leistungsinvariant
- Diagonalform
- Und was noch?

**Text noch einbauen**

### 4.1 Leistungsvariante Transformation allgemein

Da die System-Untermatrizen alle zyklisch und zum Teil zusätzlich noch symmetrisch sind, kann man die Systemgleichungen mittels einer variablen Transformation vereinfachen. Dies wird hier allgemein demonstriert.

Spannungsgleichung:

$$\boxed{(u) = (R) \cdot (i) + \frac{d}{dt} \{ (L) \cdot (i) \}} \quad (4.1)$$

Ansätze

$(u) = (C_u) (\underline{u})$       $(C_u)$  und  $(C_i)$  müssen regulär sein, d.h. Umkehrfunktion existent

$(i) = (C_i) (\underline{i})$

Umkehrung ist dann definiert, wenn

$$\text{Det}(C_u) \neq 0 \quad (4.2)$$

$$(\underline{u}) = (C_u)^{-1} \cdot (u) \quad ; \quad (\underline{i}) = (C_i)^{-1} \cdot (i)$$

Bedingungen für die Transformation:

### 4.2 Leistungsvarianz

→ Leistung wird durch die gleiche Formel ohne Faktor berechnet

Skalarprodukt

$$(i)^T (u) = (\underline{i})^{*T} (\underline{u}) \quad (4.3)$$

Ableitung:

$$\overbrace{\{(C_i) \cdot (\underline{i})\}^{*T}}^{(i)^{*T}} \cdot \overbrace{(C_u) \cdot (\underline{u})}^{(u)} = (\underline{i})^{*T} \underbrace{(C_i)^{*T} \cdot (C_u)}_{(E)} \cdot (u)$$

$$(C_i)^{*T} (C_u) \cdot (C_u)^{-1} = (E) \cdot (C_u)^{-1}$$

Bedingung:

$$(C_i)^{*T} = (C_u)^{-1} \quad \text{oder} \quad (C_i) = (C_u)^{-1 * T}$$

oder  $(C_i)^{-1} = (C_u)^{*T}$  wegen Leistungsvarianz

Bedingungen

a) Ist außerdem  $(C_i)$  hermetisch, also  $(C_i) = (C_i)^* T$ , dann gilt  $(C_i) = (C_u)^{-1}$

hermetisch  $a_{ik}^* = a_{ki}$   $a_{ii} = \text{reell}$

$$(\bar{a}) = \begin{bmatrix} a & c + jd \\ c - jd & b \end{bmatrix} \quad (a)^{*T} = \begin{bmatrix} a & c - jd \\ c + jd & b \end{bmatrix}^T$$

b) Ist außerdem  $(C_i)$  unitär  $(C_i)^{-1} = (C_i)^* T$ , dann gilt  $(C_i) = (C_u)$

bei reell  $\rightarrow$  orthogonal

unitär  $(a)^{*T} \cdot (a) = (1)$

$$(a) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & j \sin \varphi \\ j \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (a)^{*T} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -j \sin \varphi \\ -j \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$(a)^{*T} \cdot (a) = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi & j \cos \varphi \cdot \sin \varphi - j \sin \varphi \cdot \cos \varphi \\ -j \sin \varphi \cdot \cos \varphi + j \sin \varphi \cdot \cos \varphi & \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**4.3 Transformiertes Spannungsgleichungssystem**

$$(C_u)^{-1} (C_u) \cdot (\underline{u}) = (C_u)^{-1} (R) \cdot (C_i) \cdot (\underline{i}) + (C_u)^{-1} \cdot \frac{d}{dt} \{ (L) \cdot (C_i) \cdot (\underline{i}) \}$$

$$(\underline{u}) = (\underline{R}) \cdot (\underline{i}) + (C_u)^{-1} \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \underbrace{(C_u) (C_u)^{-1} \cdot (L) \cdot (C_i)}_{(\underline{L})} \cdot (\underline{i}) \right\}$$

$$(C_u)^{-1} \cdot \frac{d}{dt} \{ (C_u) \cdot (\Psi) \}$$

Differential:

$$(\underline{u}) = (\underline{R}) \cdot (\underline{i}) + \underbrace{C_u^{-1} \cdot \frac{\partial (C_u)^{-1}}{\partial t}}_{(\underline{E})} \cdot (\Psi) + (C_u^{-1}) \cdot (C_u) \cdot \frac{d(\Psi)}{dt}$$

$$(\underline{u}) = (\underline{R}) \cdot (\underline{i}) + (\underline{E}) \cdot (\Psi) + \frac{d(\Psi)}{dt}$$

Dabei haben die Spannungsanteile folgende Bedeutung:

$(\underline{u})$	Spannungen an den Wicklungen
$(\underline{R}) \cdot (\underline{i})$	Ohmsche Spannungen
$(\underline{E}) \cdot (\Psi)$	Spannungen wegen zeitabhängiger Transformation
$\frac{d(\Psi)}{dt}$	Spannungen wegen Flußänderung

$$(\underline{R}) = (C_u)^{-1} \cdot (R) \cdot (C_i)$$

$$(\underline{L}) = (C_u)^{-1} \cdot (L) \cdot (C_i)$$

$$(\underline{F}) = (C_u)^{-1} \cdot \frac{d}{dt} \cdot (C_u)$$

$(\underline{F})$  tritt nur auf, wenn  $(C_u)$  zeitvariant ist.

Bei der Transformation muss  $L$  einfacher werden.

#### 4.4 Transformation auf Diagonalform

Die Hypermatrix  $(L)$  besteht aus vier dreizeiligen quadratischen Matrizen

$$(\underline{L}) = \begin{bmatrix} (L_{SS}) & (L_{SR}) \\ (L_{RS}) & (L_{RR}) \end{bmatrix} \quad \text{Symmetrie} \quad \begin{aligned} (L_{SS}) &= (L_{SS})' \\ (L_{RR}) &= (L_{RR})' \end{aligned}$$

Wenn  $(\underline{L}_{SR})$  betrachtet wird, ist auch  $(L_{SS})$  mit eingeschlossen, da  $(L_{SR})$  zyklisch ist.

$$(\underline{L}_{SR}) = (\underline{Z}) = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{bmatrix}$$

Für diese zyklische Matrix wird eine Vereinfachung so gesucht, damit eine Diagonalmatrix entsteht.

Nach einem Satz in der Matrizenrechnung (Zurmühl) lässt sich nur dann eine Matrix unitär auf Diagonalform  $(\Lambda) = \text{Diag}(\lambda_i)$  ihrer Eigenwerte transformieren, wenn die Matrix normal ist.

Die Normalbedingung wird von zyklischer Matrix  $(\underline{Z})$  erfüllt

$$(\underline{Z})^{*T} \cdot (\underline{Z}) = (\underline{Z}) \cdot (\underline{Z})^{*T}$$

Die Transformationsvorschrift lautet dann  $(\underline{L}) = (C_i)^{*T} \cdot (L) \cdot (C_i)$

$$(X)^{-1} (Z) \cdot (X) = (X)^{-1} (\Lambda) \quad \text{wegen} \quad (X)^{-1} = (X)^{*T}$$

$$(X)^{*T} \cdot (Z) \cdot (X) = (\Lambda)$$

Die unitäre Transformationsmatrix  $(X)$  ist eine durch spaltenweise Zusammenfassung der auf 1 normierten Eigenvektoren der Matrix  $(Z)$  entstehende Eigenvektormatrix

$$(X) = (X_1); (X_2); (X_3) = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} & X_{31} \\ X_{12} & X_{22} & X_{32} \\ X_{13} & X_{23} & X_{33} \end{bmatrix}$$

Zur Findung geeigneter Transformationsmatrizen wird die unitäre Transformation der zyklischen Matrix  $(Z)$  demonstriert

$$(Z) = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{bmatrix} .$$

Charakteristische Gleichung  $\det[(Z) - \lambda(E)] = 0$       ( $E$ ) Einheitsmatrix

#### 4.4.1 Symmetrisch:

$$(Z) = \begin{bmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{bmatrix}$$

Es soll mit der unitären Transformationsmatrix transformiert werden.

#### Eigenwerte

Es geht darum, zu einer quadratischen, sonst aber bel. Matrix  $A$  Vektoren  $x$  der Art zu finden, dass der mit  $A$  transformierte Vektor  $Y = A \cdot x$  dem Ausgangsvektor  $X$  proportional ist (parallel).

$$Ax = \lambda \cdot x \Rightarrow \{(A) - \lambda \cdot (E)\} \cdot (x) = 0$$

$$(X)^{*T} (Z) (X) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \lambda_{1,2,3} \text{ sind dabei die Eigenwerte}$$

#### Unitäre Transformationsmatrix:

$$(X) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{a} = e^{j2\pi/3} = (X)^{*T}$$

Die Eigenwerte sind:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = A + a^2 \cdot B + a \cdot C \\ \lambda_2 = A + a \cdot B + a^2 \cdot C \\ \lambda_3 = A + B + C \end{array} \right\} \text{ nur zyklisch}$$

Sonderfall  $B = C$ :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = A - B$$

$$\lambda_3 = A + 2B$$

Damit wird

$$(X)^{*T} \cdot (Z) \cdot (X) = \begin{bmatrix} A + a^2 \cdot B + a \cdot C & 0 & 0 \\ 0 & A + a \cdot B + a^2 \cdot C & 0 \\ 0 & 0 & A + B + C \end{bmatrix}$$

und im Sonderfall  $B = C$ :

$$(X)^{*T} \cdot (\underline{Z}) \cdot (X) = \begin{bmatrix} A-B & & \\ & A-B & \\ & & A+2B \end{bmatrix}$$

Ziel: Diagonalmatrix ist erreicht.

#### 4.4.2 Anwendung auf Induktivitätsmatrix und die Variablen.

Anwendung der leistungsinvarianten Transformation auf die Asynchronmaschine.

Ziele:

- Winkelabhängigkeit beseitigen
- Rotor auf Ständer umrechnen wie beim Trafo
- Bezugssystem (frei wählbar) in die Beschreibung einführen
- 

Dazu müssen die Transformationsmatrizen für Ständer und Rotor folgendes Aussehen haben:

Ständer Bezugssystem

$$(C_S) = (X) \cdot \begin{bmatrix} e^{-j\gamma_S} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\gamma_S} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotor Bezugssystem

$$(C_R) = (X) \cdot \begin{bmatrix} e^{-j\gamma_R} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\gamma_R} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Durch die Wahl von  $\gamma_S$  oder  $\gamma_R$  wird über die Bezugsachse verfügt. Beide Winkel sind über den Rotorpositionswinkel verknüpft:

$$\gamma_R - \gamma_S = \gamma$$

$$\begin{bmatrix} (u_S) \\ (u_R) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_S) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ddot{u}} (C_R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\underline{u}_S) \\ (\underline{u}'_R) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} (i_S) \\ (i_R) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_S) & 0 \\ 0 & \ddot{u} \cdot (C_R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\underline{i}_S) \\ (\underline{i}'_R) \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } \ddot{u} = \frac{w_S \xi_{S1} \cdot 1}{w_R \xi_{R1} \chi_1}$$

$(C_S)$  und  $(C_R)$  sind unitär:

Auch die Umrechnung von Rotor auf Ständer muss leistungsinvariant sein:

$$\frac{1}{\ddot{u}} \cdot (\underline{u}'_R) = (\underline{u}_R) \quad \text{und}$$

$$P = (\underline{u}_R)^{*T} \cdot (\underline{i}_R) = \frac{(\underline{u}_R)^{*T}}{\ddot{u}} \cdot \ddot{u} (\underline{i}_R)$$

$$\ddot{u} \cdot (\underline{i}'_R) = (\underline{i}_R)$$

$$= (\underline{u}'_R)^{*T} \cdot (\underline{i}'_R)$$

## 4.5 Eigenwertproblem der Transformation

$$(Z) = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{bmatrix} \text{ zyklische Matrix}$$

Die Eigenwerte erhält man aus der Bedingung

$$\det[(Z) - \lambda \cdot (E)] = 0, \quad \text{also} \quad \det \begin{bmatrix} A - \lambda & B & C \\ C & A - \lambda & B \\ B & C & A - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Determinante hiervon ist

$$A^3 - 3 \cdot A^2 \cdot \lambda + 3 \cdot A \cdot \lambda^2 - 3 \cdot A \cdot B \cdot C - \lambda^3 + 3 \cdot \lambda \cdot B \cdot C + C^3 + B^3 = 0$$

Die char. Gleichung lässt sich zum Glück faktorisieren

$$-(\lambda - B - A - C) \cdot (\lambda^2 - 2 \cdot A \cdot \lambda + B \cdot \lambda + \lambda \cdot C + A^2 - B \cdot C - B \cdot A - C \cdot A + B^2 + C^2) = 0$$

Daraus erhält man die Lösungen der Gleichung als die Eigenwerte

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B + A + C \\ A - \frac{1}{2} \cdot B - \frac{1}{2} \cdot C + \frac{1}{2} \cdot i \cdot (-B + C) \cdot \sqrt{3} \\ A - \frac{1}{2} \cdot B - \frac{1}{2} \cdot C - \frac{1}{2} \cdot i \cdot (-B + C) \cdot \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

mit dem komplexen Faktor

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2 &= -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{wird} \\ a^3 &= 1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A + B + C \\ A + a^2 \cdot B + a \cdot C \\ A + a \cdot B + a^2 \cdot C \end{bmatrix}} \quad (4.6)$$

Das Ergebnis der Transformation wird dann sein

$$(X)^{*T} \cdot (Z) \cdot (X) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Zur Transformation von Spannung und Strom müssen aus dem linearen Gleichungssystem die zu den drei Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren bestimmt werden.

#### 4.5.1.1 1. Eigenwert

$$\lambda = A + B + C$$

$$\begin{bmatrix} A-A-B-C & B & C \\ C & A-A-B-C & B \\ B & C & A-A-B-C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$-BX_1 - CX_1 + BX_2 + CX_3 = 0$$

$$+CX_1 - BX_2 - CX_2 + BX_3 = 0$$

$$BX_1 + CX_2 - BX_3 - CX_3 = 0$$

$$B^2 X_1 + BC \cdot X_1 - B^2 X_2 + C^2 X_1 - BC \cdot X_2 - C^2 X_2 = 0$$

$$X_1 \cdot (B^2 + BC + C^2) = X_2 \cdot (B^2 + BC + C^2) \quad X_1 = X_2$$

$$B \cdot X_1 + C \cdot X_1 = (B+C) \cdot X_3 \rightarrow X_3 = X_1$$

$$\boxed{(X_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot X_1}$$

1. Eigenvektor

(4.7)

#### 4.5.1.2 2. Eigenwert

$$\lambda = A + a^2 \cdot B + a \cdot C$$

$$-(a^2 \cdot B + a \cdot C) \cdot X_1 + B \cdot X_2 + C \cdot X_3 = 0 \quad (1)$$

$$C \cdot X_1 - (a^2 \cdot B + a \cdot C) X_2 + B \cdot X_3 = 0 \quad (2)$$

$$B \cdot X_1 + C \cdot X_2 - (a^2 \cdot B + a \cdot C) \cdot X_3 = 0 \quad (3)$$

(1) mit  $-B$ , (2) mit  $C$  multipliziert.

$$\{(a^2 \cdot B + a \cdot C) \cdot B + C^2\} \cdot X_1 - \{B^2 + (a^2 \cdot B + a \cdot C) \cdot C\} \cdot X_2 = 0$$

$$C \{(a^2 \cdot B + a \cdot C) + B^2\} \cdot X_1 + \{B \cdot C - (a^2 \cdot B + a \cdot C)^2\} \cdot X_2 = 0$$

$$\{a^2 \cdot B^2 + a \cdot B \cdot C + C^2\} \cdot X_1 - \{B^2 + a^2 \cdot B \cdot C + a \cdot C^2\} \cdot X_2 = 0 \quad (4)$$

$$\{a^2 \cdot B \cdot C + a \cdot C^2 + B^2\} \cdot X_1 + \{B \cdot C - a^4 \cdot B^2 - 2 \cdot B \cdot C \cdot a^2 - a^2 \cdot C^2\} \cdot X_2 = 0 \quad (5)$$

$$a^3 = 1; \quad a^4 = a; \quad a^5 = a^2; \quad a^6 = 1$$

Aus (4) wird

$$a^2 (B^2 + a^2 \cdot B \cdot C + a \cdot C) \cdot X_1 - \{B^2 + a^2 \cdot B \cdot C + a \cdot C^2\} \cdot X_2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$X_2 = a^2 \cdot X_1$$

Aus (3) wird

$$B \cdot X_1 + a^2 \cdot C \cdot X_1 - (a^2 \cdot B + a \cdot C) \cdot X_3 = 0$$

$$a \cdot X_1 (a^2 \cdot B + a \cdot C) - (a^2 \cdot B + a \cdot C) \cdot X_3 = 0 \quad X_3 = a \cdot X_1$$

$$\boxed{(X_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} X_1} \quad \text{2. Eigenvektor}$$

### 4.5.1.3 3. Eigenwert

$$\lambda = A + a \cdot B + a^2 \cdot C$$

$$-(a \cdot B + a^2 \cdot C) \cdot X_1 + B \cdot X_2 + C \cdot X_3 = 0 \quad -B \quad (1)$$

$$C \cdot X_1 - (a \cdot B + a^2 \cdot C) \cdot X_2 + B \cdot X_3 = 0 \quad C \quad (2)$$

$$B \cdot X_1 + C \cdot X_2 - (a \cdot B + a^2 \cdot C) \cdot X_3 = 0 \quad (3)$$

$$\{(a \cdot B + a^2 \cdot C) \cdot B + C^2\} \cdot X_1 - \{B^2 + (a \cdot B + a^2 \cdot C) \cdot C\} \cdot X_2 = 0$$

$$a \cdot X_1 \cdot \{B^2 + B \cdot C \cdot a + a^2 \cdot C^2\} - \{B^2 + a \cdot B \cdot C + a^2 \cdot C^2\} \cdot X_2 = 0$$

Daraus

$$X_2 = a \cdot X_1$$

In die Gleichung (3) eingesetzt:

$$B \cdot X_1 + C \cdot a \cdot X_1 - a \cdot (B + a \cdot C) \cdot X_3 = 0$$

erhält man für

$$a \cdot X_3 = X_1$$

oder

$$X_3 = a^2 \cdot X_1$$

Der 3. Eigenvektor lautet damit bis auf einen Proportionalitätsfaktor

$$\boxed{(X_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix} X_1} \quad \text{3. Eigenvektor} \quad (4.8)$$

### 4.5.2 Normierung des Eigenvektors mit der Euklidischen Norm

$$(X_i)^{*T} \cdot (X_i) \stackrel{!}{=} 1$$

$$k^2 (1, a^2, a) \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 1$$

$$k^2 (1 + a^2 + a^3) = 1 \quad \text{oder} \quad k^2 = \frac{1}{3} \quad \text{und}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Damit lautet der Eigenvektor für den Eigenwert

$$\lambda = A + a \cdot B + a^2 \cdot C$$

$$(X) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$$

### 4.5.3 Beispiel zu den Eigenwerten

$$(A) \cdot (X) = \lambda \cdot (X) \Rightarrow \{(A) - \lambda(E)\} \cdot (X) = 0$$

$$(A) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \det(A - \lambda \cdot E) = 0$$

$$0 = -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = 0$$

Die Eigenwerte sind dann:  $\lambda_1 = 0$ ;  $\lambda_2 = 1$ ;  $\lambda_3 = -2$

Die Eigenvektoren werden aus dem zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystem bestimmt.

1)  $\lambda_1 = 0$

$$(A) \cdot \underline{X} = 0 \quad \begin{cases} 2 \cdot X_1 - 3 \cdot X_2 + X_3 = 0 \\ 3 \cdot X_1 + X_2 + 3 \cdot X_3 = 0 \\ -5X_1 + 2 \cdot X_2 - 4 \cdot X_3 = 0 \end{cases}$$

$$X_3 = -\frac{11}{10} \cdot X_1 \quad \begin{cases} 12X_1 + 4X_2 + 12X_3 = 0 \\ -15X_1 + 6X_2 - 12X_3 = 0 \end{cases}$$

$$X_2 = \frac{3}{10} \cdot X_1 - 3 \cdot X_1 + 10X_2 = 0$$

$X_1$  kann beliebig gewählt werden, z.B.  $X_1 = 10$

$$(X_1) = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} \cdot k$$

$k$  kann beliebig gewählt werden, z.B. auch so, dass die Euklidische Norm = 1 wird.

$$(X_1)^T \cdot (X_1) = 1$$

$$k(10, 3, -11) \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} \cdot k = 1$$

$$k^2(100 + 9 + 121) = 1 \quad k = \frac{1}{\sqrt{230}}$$

$$(X_1) = \frac{1}{\sqrt{230}} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$$

2)  $\lambda_2 = 1$

$$((A) - \lambda_2 \cdot E) \cdot \underline{X} = 0$$

$$\begin{cases} X_1 - 3 \cdot X_2 + X_3 = 0 \\ 3 \cdot X_1 + 3 \cdot X_3 = 0 \\ -5 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 - 5 \cdot X_3 = 0 \end{cases}$$

Mit  $X_1$  bel. wird  $X_3 = -X_1$  und  $-3X_2 + X_1 - X_1 = 0$  sowie  $X_2 = 0$

$$(X_2) = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad k^2(1+1) = 1 \quad k = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (X_2) = \frac{1}{\sqrt{230}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

#### 4.6 Berechnung von $(L)$

Aus  $(L) = (C_u)^{-1} \cdot (L) \cdot (C_i)$  mit  $(C_u) = (C_i)$

$$(C_u) = \begin{bmatrix} (C_S) \\ \frac{1}{\ddot{u}}(C_R) \end{bmatrix} \quad \text{wegen unitär} \quad (C_S)^{-1} = (C_S)^{*T}$$

Damit wird

$$(L) = \begin{bmatrix} (C_S)^{*T} & \boxed{\phantom{00}} & \boxed{[(L_{SS}) + (S_S)]} & \boxed{(L_{SR})} & \boxed{(C_S)} & \boxed{\phantom{00}} \\ \boxed{\phantom{00}} & \boxed{\ddot{u}(C_R)^{*T}} & \boxed{(L_{SR})^T} & \boxed{[(L_{RR}) + (S_R)]} & \boxed{\phantom{00}} & \boxed{\ddot{u}(C_R)} \end{bmatrix} =$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 11 & & & 14 \\ & 22 & & 25 \\ & & 23 & \\ \hline 41 & & & 44 \\ & 52 & & 55 \\ & & & & 66 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 11 & & \\ & 22 & \\ & & 33 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{j\gamma_s} & & \\ & e^{-j\gamma_s} & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{(C_S)^{*T}} (X)^{*T}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (L_{SS}) + S_S \\ A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{bmatrix}}_{\text{Diagonalmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-j\gamma_S} & & \\ & e^{j\gamma_S} & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{(C_S)}$$

Wegen der Multiplikation der Diagonalmatrix mit  $(C_S)$  bzw.  $(C_S)^{*T}$  fällt  $e^{j\gamma_S}$  jeweils heraus und braucht daher nicht weiter in der Hypermatrix berücksichtigt zu werden. Für das Element  $\boxed{11}$  bzw.  $\boxed{22}$  erhält man

$$\begin{aligned} \boxed{11} = \boxed{22} &= A - B = L_S \left( \overbrace{1 + \sigma_{ii}}^A + \overbrace{1/2 - \sigma_{ik}}^{-B} \right) + \overbrace{S_{ii}}^A - \overbrace{S_{ik}}^{-B} \\ &= \underbrace{\frac{3}{2} L_S}_{\text{Hauptinduktivität}} + \underbrace{\frac{3}{2} L_S \cdot \frac{2}{3} (\sigma_{Sii} - \sigma_{Sik})}_{\text{Oberwellenstr. Nut- und Stirnstr.}} + (S_{ii} - S_{ik}) \\ &= L_{Sh} + L_{S\sigma} \end{aligned}$$

Statorstreuinduktivität

**4.6.1 Element  $\boxed{33}$  ist**

$$\begin{aligned} \boxed{33} &= A + 2B = L_S \left( \overbrace{1 + \sigma_{Sii}}^A - \overbrace{1 + 2\sigma_{Sik}}^{+2B} \right) + \overbrace{S_{Sii}}^A + \overbrace{2S_{Sik}}^{+2B} \\ &= \frac{3}{2} L_S \cdot \frac{2}{3} (\sigma_{Sii} + 2\sigma_{Sik}) + (S_{Sii} + 2S_{Sik}) \\ &= L_{S0} \quad \text{Stator-Nullinduktivität} \end{aligned}$$

Elemente  $\boxed{44}$  und  $\boxed{55}$  werden analog zu  $\boxed{11}$  und  $\boxed{22}$  berechnet. Auch hier hat der Dreher mit  $e^{-j\gamma_R}$  und  $e^{+j\gamma_R}$  aufgrund der Diagonalmatrix keinen Einfluss und braucht daher nicht berücksichtigt werden.

$$\begin{aligned} \boxed{44} = \boxed{55} &= \dot{u}^2 (A - B) \\ &= \dot{u}^2 L_R \left( \overbrace{1 + \sigma_{Rii}}^A + \overbrace{1/2 - \sigma_{Rik}}^{-B} \right) + \dot{u}^2 \left( \overbrace{S_{Rii}}^A - \overbrace{S_{Rik}}^{-B} \right) \\ &= \dot{u}^2 \underbrace{\frac{3}{2} L_R}_{\downarrow} + \dot{u}^2 \frac{3}{2} L_R \frac{2}{3} (\sigma_{Rii} - \sigma_{Rik}) + \dot{u}^2 (S_{Rii} - S_{Rik}) \\ &= L_{Sh} \frac{1}{\chi_1^2} + L_{Sh} \frac{1}{\chi_1^2} \cdot \frac{2}{3} (\sigma_{Rii} - \sigma_{Rik}) + \dot{u}^2 (S_{Rii} - S_{Rik}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= L_{Sh} + \underbrace{\frac{1-\lambda_1^2}{\chi_1^2} L_{Sh}}_{\text{Schrägungsstr.}} + \underbrace{L_{Sh} \frac{1}{\chi_1^2} \cdot \frac{2}{3}}_{\text{Oberwellenstr.}} (\sigma_{Rii} - \sigma_{Rik}) + \underbrace{\ddot{u}^2 (S_{Rii} - S_{Rik})}_{\text{Nut-und Störnstr.}} \\
&= L_{Sh} + L'_{R\sigma}
\end{aligned}$$

$L'_{R\sigma}$  ist die auf den Stator umgerechnete Rotorstreuinduktivität.

Umformung:

$$\frac{L_{Sh}}{\chi_1^2} + L_{Sh} - L_{Sh} \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2} = L_{Sh} + \frac{1-\lambda_1^2}{\lambda_1^2} \cdot L_{Sh}$$

$$L_S = \frac{4 \cdot \mu_0 \cdot l \cdot \tau_p}{\pi^2 \cdot p \cdot \delta''} (\omega_S \cdot \xi_{S1})^2$$

$$L_R = \frac{4 \cdot \mu_0 \cdot l \cdot \tau_p}{\pi^2 \cdot p \cdot \delta''} (\omega_R \cdot \xi_{R1})^2$$

$$\ddot{u} = \frac{\omega_S \cdot \xi_{S1}}{\omega_R \cdot \xi_{R1}} \frac{1}{\chi_1} \Rightarrow \ddot{u}^2 = \frac{L_S}{L_R \chi_1^2} \frac{3}{2} L_S = L_{Sh}$$

Element  $\boxed{66}$  Nullkomponente im Rotor

Es ist

$$\boxed{66} = A + 2B$$

$$\begin{aligned}
&= \ddot{u}^2 L_R \left( \overbrace{1 + \sigma_{Rii}}^A - \overbrace{1 + 2\sigma_{Rik}}^{2B} \right) + \ddot{u}^2 \left( \overbrace{S_{Rii}}^A + \overbrace{2S_{Rik}}^{2B} \right) \\
&= \ddot{u}^2 L_R \frac{2}{3} (\sigma_{Rii} + \sigma_{Rik}) + \ddot{u}^2 (S_{Rii} + 2S_{Rik}) \\
&= L'_{R0} \text{ Rotor-Nullinduktivität, auf den Stator umgerechnet.}
\end{aligned}$$

Für die Elemente in den Nebendiagonalen gilt:

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix} = \ddot{u} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{j\gamma_S} & & \\ & e^{-j\gamma_S} & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{(C_S)^{*T}} \underbrace{\begin{pmatrix} (L_{SR}) & (X) \\ \begin{array}{ccc|c} A & B & C & \\ C & A & B & \\ B & C & A & \end{array} \\ \text{Diagonalmatrix} \end{pmatrix}}_{\text{Diagonalmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-j\gamma_R} & & \\ & e^{j\gamma_R} & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{(C_R)}$$

Die Diagonalmatrix wird nun von links mit  $e^{j\gamma_S}$  und von rechts mit  $e^{j\gamma_R}$  multipliziert. Weil in  $(C_S)^{*T}$  und  $(C_R)$  nur in den Diagonalen die Elemente von Null verschieden sind, tritt das Produkt  $e^{j\gamma_S} \cdot e^{-j\gamma_R}$  bzw.  $e^{-j\gamma_S} \cdot e^{j\gamma_R}$  auf und fällt nicht weg!

Das Element  $\boxed{14}$  ist: Weil  $(L_{SR})$  nur zyklisch ist  $\lambda_1$ ;  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$

$$\begin{aligned}
\boxed{14} &= \ddot{u} \cdot e^{j(\gamma_S - \gamma_R)} \cdot \lambda_1 \\
&= \ddot{u} \cdot e^{j(\gamma_S - \gamma_R)} \cdot (A + a^2 \cdot B + a \cdot C)
\end{aligned}$$

Das Element  $\boxed{33}$  ist:

$$\begin{aligned}
 \boxed{33} &= A + 2B \\
 &= L_S \left( \overbrace{1 + \sigma_{Sii}}^A - \overbrace{1 + 2\sigma_{Sik}}^{+2B} \right) + \left( \overbrace{S_{Sii}}^A + \overbrace{2S_{Sik}}^{+2B} \right) \\
 &= \frac{3}{2} L_S \cdot \frac{2}{3} (\sigma_{Sii} + 2\sigma_{Sik}) + (S_{Sii} + 2S_{Sik}) \\
 &= L_{S0} \quad \text{Stator-Nullinduktivität}
 \end{aligned}$$

Element  $\boxed{44}$  und  $\boxed{55}$  werden analog zu  $\boxed{11}$  und  $\boxed{22}$  berechnet. Auch hier hat der Dreher mit  $e^{-j\gamma_R}$  und  $e^{+j\gamma_R}$  aufgrund der Diagonalmatrix keinen Einfluss und braucht daher nicht berücksichtigt werden.

$$\boxed{44} = \boxed{55} = \ddot{u}^2 (A - B)$$

$$\begin{aligned}
 &= \ddot{u}^2 L_R \left( \overbrace{1 + \sigma_{Rii}}^A + \overbrace{1/2 - \sigma_{Rik}}^{-B} \right) + \ddot{u}^2 \left( \overbrace{S_{Rii}}^A - \overbrace{S_{Rik}}^{-B} \right) \\
 &= \ddot{u}^2 \frac{3}{2} L_R + \ddot{u}^2 \frac{3}{2} L_R \cdot \frac{2}{3} (\sigma_{Rii} - \sigma_{Rik}) + \ddot{u}^2 (S_{Rii} - S_{Rik}) \\
 &= L_{Sh} \frac{1}{\chi_1^2} + L_{Sh} \frac{1}{\chi_1^2} \cdot \frac{2}{3} (\sigma_{Rii} - \sigma_{Rik}) + \ddot{u}^2 (S_{Rii} - S_{Rik}) \\
 &= L_{Sh} + \underbrace{\frac{1 - \chi_1^2}{\chi_1^2} L_{Sh}}_{\text{Schrägungsstr.}} + \underbrace{L_{Sh} \frac{1}{\chi_1^2} \cdot \frac{2}{3}}_{\text{Oberwellenstr.}} (\sigma_{Rii} - \sigma_{Rik}) + \underbrace{\ddot{u}^2 (S_{Rii} - S_{Rik})}_{\text{Nut- und Stirnstr.}} \\
 &= L_{Sh} + L'_{R\sigma}
 \end{aligned}$$

$L'_{R\sigma}$  ist die auf den Stator umgerechnete Rotorstreuinduktivität.

Umformung:

$$\frac{L_{Sh}}{\chi_1^2} + L_{Sh} - L_{Sh} \frac{\chi_1^2}{\chi_1^2} = L_{Sh} + \frac{1 - \chi_1^2}{\chi_1^2} \cdot L_{Sh}$$

$$L_S = \frac{4 \cdot \mu_0 \cdot l \cdot \tau_p}{\pi^2 \cdot p \cdot \delta''} (\omega_S \cdot \xi_{S1})^2$$

$$L_R = \frac{4 \cdot \mu_0 \cdot l \cdot \tau_p}{\pi^2 \cdot p \cdot \delta''} (\omega_R \cdot \xi_{R1})^2$$

$$\ddot{u} = \frac{\omega_S \cdot \xi_{S1}}{\omega_R \cdot \xi_{R1}} \frac{1}{\chi_1} \quad \rightarrow \quad \ddot{u}^2 = \frac{L_S}{L_R \cdot \chi_1^2} \quad \text{wobei} \quad \frac{3}{2} L_S = L_{Sh}$$

$$= \ddot{u} \cdot e^{j(\gamma_S - \gamma_R)} \left( \cos \gamma + a^2 \cdot \cos \left( \gamma + \frac{2\pi}{3} \right) + a \cdot \cos \left( \gamma + \frac{4\pi}{3} \right) \right) \cdot L_{SR}$$

$\cos \gamma$  wird mit Hilfe der komplexen Rechnung

$$\cos \gamma = \frac{e^{j\gamma} + e^{-j\gamma}}{2}$$

$$\text{also ist } \cos \left( \gamma + \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{a \cdot e^{j\gamma} + a^2 \cdot e^{-j\gamma}}{2}$$

$$\begin{aligned} \boxed{14} &= \ddot{u} \cdot L_{SR} e^{j(\gamma_S - \gamma_R)} \cdot \frac{1}{2} \left[ e^{j\gamma} (1 + a^2 \cdot a + a \cdot a^2)^3 + e^{-j\gamma} (1 + a^2 \cdot a^2 + a \cdot a) \right]^0 \\ &= \ddot{u} \cdot L_{SR} \cdot \frac{3}{2} \cdot e^{j(\gamma_S - \gamma_R + \gamma)} \cdot 1 \end{aligned}$$

Wegen der Wahl der Bezugsachse bzw. aus der Skizze gilt:

$$\gamma = -\gamma_S + \gamma_R \quad \text{oder}$$

$$0 = \gamma_S - \gamma_R + \gamma$$

Die Winkelabhängigkeit verschwindet hier unabhängig vom Bezugssystem.

$$\boxed{14} = \ddot{u} \cdot L_{SR} \cdot \frac{3}{2} = L_{Sh}$$

hier wird die Wahl von  $\ddot{u}$  so getroffen, dass  $L_{Sh}$  als Wechselinduktivität auftritt. Dadurch tritt im Rotorkreis die Schrägungstreuung auf.

Restliche Elemente:

$$\boxed{14} = \boxed{25} \text{ wegen } \lambda_2 = \lambda_1^*, \text{ weil } \lambda_1 = \text{reell, ist } \lambda_1 = \lambda_2$$

$$\boxed{25} = \boxed{41} \text{ wegen } \boxed{25} \text{ reell und der Diagonalmatrix}$$

$$L_{Sh} = \boxed{41} = \boxed{25} = \boxed{52} = \boxed{14}.$$

#### 4.7 Nachtrag zu der Transformation der Induktivitäten:

$$\frac{2}{3} (\sigma_{Sii} - \sigma_{Sik}) = \sigma_{0S} = \sum_{v=2}^{\infty} \left( \frac{\xi_{Sv}}{v \xi_{S1}} \right)^2 \frac{2}{3} \left( 1 - \cos v \frac{2\pi}{3} \right)$$

von null verschiedene Glieder der Reihe nur für  $v = 5, 7, 11, 13 \dots$

$$\frac{2}{3} (\sigma_{Sii} - 2\sigma_{Sik}) = \sigma_{0S_0} = \sum_{v=2}^{\infty} \left( \frac{\xi_{Sv}}{v \xi_{S1}} \right)^2 \frac{2}{3} \left( 1 + 2 \cos v \frac{2\pi}{3} \right)$$

von null verschiedene Glieder der Reihe nur für  $v = 3, 9, 15, 21, \dots$

Entsprechendes gilt für die Oberwellenstreuiziffern  $\sigma_{0R}$  und  $\sigma_{0R_0}$  des Rotors.

Aus den Teilergebnissen folgt, dass wie gewünscht die Winkelabhängigkeit  $\frac{\partial(L)}{dt} = 0$

verschwunden ist. In der Momentengleichung braucht dann nur noch der  $\text{Re}\{(i)^{*T} \cdot (\underline{F}) \cdot (\underline{\Psi})\}$  berücksichtigt werden. Die transformierte (Diagonalform) hat nun

folgende Form:

$$(\underline{L}) = \begin{bmatrix} L_{Sh} + L_{S\sigma} & 0 & 0 & L_{Sh} & 0 & 0 \\ 0 & L_{Sh} + L_{S\sigma} & 0 & 0 & L_{Sh} & 0 \\ 0 & 0 & L_{S0} & 0 & 0 & 0 \\ L_{Sh} & 0 & 0 & L_{Sh} + L'_{R\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & L_{Sh} & 0 & 0 & L_{Sh} + L'_{R\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{R0} \end{bmatrix}$$

#### 4.8 Transformierte Widerstandsmatrix

Weil die Widerstandsmatrix eine Diagonalmatrix ist, muss die Winkelabhängigkeit nicht berücksichtigt werden. Die Transformation ergibt wieder eine Diagonalmatrix

$$(\underline{R}) = \begin{bmatrix} R_S & 0 \\ 0 & \ddot{u}^2(R_R) \end{bmatrix}, \quad \ddot{u}^2 R_R = R'_R$$

Für das vollständige transformierte System sind noch die Variablen  $(\underline{u}_S); (\underline{i}_S); (\underline{u}'_R)$  und  $(\underline{i}'_R)$  zu berechnen.

#### 4.9 Berechnung der Koeffizientenmatrizen $(\underline{F}); (\underline{L})$ und $(\underline{R})$

##### 4.9.1 Berechnung von $(\underline{F})$

Es war  $(C_u)^{-1} \cdot \frac{\partial(C_u)^{-1}}{dt}$  unitäre Eigenschaft

$$(C_S)^{-1} = (C_S)^{*T}$$

angewendet:

$$(\underline{E}) = \begin{bmatrix} (C_S)^{*T} & \\ & \ddot{u}(C_R)^{*T} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (C_S) \\ \frac{1}{\ddot{u}}(C_R) \end{bmatrix}$$

in  $(C_S)$  und  $(C_R)$  ist  $(X)$  zeitlich nicht abhängig. Die e-Funktion reproduziert sich, .....Form bleibt erhalten.

Aus  $(C_S)$  kommt nur  $j \cdot \dot{\gamma}$  heraus:

$$(C_S)^{*T} \cdot (C_S) = (E),$$

also ist:

$$(\underline{F}) = j \begin{bmatrix} -\dot{\gamma}_S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\gamma}_S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dot{\gamma}_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{\gamma}_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = j \cdot \begin{bmatrix} (F_S) & 0 \\ 0 & (F_R) \end{bmatrix}$$

Bild 4.1: Def. der Winkel

**4.9.2 Berechnung von  $(L)$** **4.9.3 Berechnung von  $(R)$** 

## 7 Induktivitäten Drehstrom

### 7.1 Deutung der transformierten Spannungen; Ströme

Es gilt nach der obigen Definition

$$\underline{(u_S)} = \begin{bmatrix} \underline{u_{S1}} \\ \underline{u_{S1}^*} \\ \underline{u_{S0}} \end{bmatrix} = (C_S)^{*T} ; \quad \underline{(i_S)} = \begin{bmatrix} \underline{i_{S1}} \\ \underline{i_{S1}^*} \\ \underline{i_{S0}} \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

$$\underline{(u'_R)} = \begin{bmatrix} \underline{u'_{R1}} \\ \underline{u_{R1}^*} \\ \underline{u_{R0}} \end{bmatrix} = \ddot{u} (C_R)^{*T} \cdot (u_R); \quad \underline{(i'_R)} = \begin{bmatrix} \underline{i'_{R1}} \\ \underline{i_{R1}^*} \\ \underline{i'_{R0}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\ddot{u}} (C_R)^{*T} (i_R) \quad (7.2)$$

Beispiel für  $\underline{(u_S)}$ : wegen  $(C_S)$  und  $(C_R) = \text{unitär}$   $(C_S)^{-1} = (C_S)^{*T}$

$$(C_S) = (X) \cdot (D) \quad (C_S)^{-1} = (C_S)^{*T} = ((X) \cdot (D))^{*T} = (D)^{*T} \cdot (X)^{*T}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{u_{S1}} \\ \underline{u_{S1}^*} \\ \underline{u_{S0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j\gamma_S} & & \\ & e^{-j\gamma_S} & \\ & & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{S1} \\ u_{S2} \\ u_{S3} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man:

$$\begin{bmatrix} \underline{u_{S1}} \\ \underline{u_{S1}^*} \\ \underline{u_{S0}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} e^{j\gamma_S} (u_{S1} + a \cdot u_{S2} + a^2 \cdot u_{S3}) \\ e^{-j\gamma_S} (u_{S1} + a^2 \cdot u_{S2} + a \cdot u_{S3}) \\ u_{S1} + u_{S2} + u_{S3} \end{bmatrix}$$

Für die anderen Variablen geht die Herleitung entsprechend.

Die ersten Elemente dieser Vektoren heißen Raumzeiger, die letzten Nullkomponenten, z.B.:

$$\underline{u_{S1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_{S1} + \underline{a} u_{S2} + \underline{a}^2 u_{S3}) e^{j\gamma_S} \quad (7.4)$$

$$u_{S0} = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_{S1} + u_{S2} + u_{S3}) \quad (7.5)$$

Jedes beliebige Dreiphasensystem wird durch einen komplexen Raumzeiger und eine reelle Nullkomponente beschrieben. Der Raumzeiger ist dabei von der Wahl der Bezugsachse abhängig.

Beispiel eines symmetrischen sinusförmigen? Drehspannungssystems

Definition

$$\underline{u}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (u_{S1} + a \cdot u_{S2} + a^2 \cdot u_{S3}) \cdot e^{j\gamma_S} \quad (7.6)$$

**Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**

$$\left. \begin{array}{l} u_{S1} = \sqrt{2} \cdot u_S \cdot \cos \omega t \\ u_{S2} = \sqrt{2} \cdot u_S \cdot \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ u_{S3} = \sqrt{2} \cdot u_S \cdot \cos \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{komplexer} \\ \text{Zeitwert} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \underline{u}_{S1} = \underline{u}_1 \cdot e^{j\omega t} \\ \underline{u}_{S2} = \sqrt{2} \underline{u}_1 \cdot e^{j\omega t} \cdot a^2 \\ \underline{u}_{S3} = \sqrt{2} \underline{u}_1 \cdot e^{j\omega t} \cdot a \end{array} \right\} \quad (7.7)$$

Der komplexe Effektivwert liegt in der reellen Achse.

Zeitwert, wenn  $\cos$ -Funktion gegeben war

$$u(t) = \operatorname{Re}\{\underline{u}\} = \frac{\underline{u} + \underline{u}^*}{2} \quad \text{falls} \quad \sin: \quad u(t) = \operatorname{Im}\{\underline{u}\} = \frac{\underline{u} - \underline{u}^*}{2j} \quad (7.8)$$

Anwendung auf Raumzeiger

$$\begin{aligned} \underline{u}_{S1} &= \frac{e^{j\gamma_S}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot u_S}{2} \cdot \left\{ (1 + a \cdot a^2 + a^2 \cdot a) \cdot e^{j\omega_S t} + (1 + a \cdot a + a^2 \cdot a^2) \cdot e^{-j\omega_S t} \right\} \quad (7.9) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{u_S}{2} \cdot \left\{ (1+1+1) \cdot e^{j\omega_S t} + (1+a^2+a) \cdot e^{-j\omega_S t} \right\} \cdot e^{j\gamma_S} \\ \underline{u}_{S1} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot u_S \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\gamma_S} \end{aligned}$$

Zeichnung

Bild 7.1: Darstellung eines Zeigers in der komplexen Ebene.

Test Querverweis auf GI **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**

für  $\gamma_S = 0$  bzw.  $const$  Kreis

Amplitude der Spannung  $\hat{u} = \sqrt{2} \cdot U_S$ ,

d.h. Raumzeiger ist um Faktor  $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,86$  kleiner als  $\hat{u}$

bzw.  $\sqrt{\frac{3}{2}} = 1,22$  größer als  $u_{eff}$

Wegen der Symmetrie verschwindet Nullsystem.

Definition der Raumzeiger

$e_1; e_2; e_3$ ; Einheitsvektoren

Zeichnung

Bild 7.2: Darstellung eines Zeigers in der komplexen Ebene.

Überlagerung:

$$\underline{i}_S = i_{S1} \cdot e_1 + i_{S2} \cdot e_2 + i_{S3} \cdot e_3 \quad \text{formal}$$

$e_1; e_2; e_3$  werden nun in der komplexen Ebene ausge...?

### 7.1.1 Einheitsvektoren in der komplexen Ebene

$$e_1 = 1$$

$$e_2 = \cos 120^\circ + j \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} = a \quad (7.10)$$

$$e_3 = \cos 240^\circ + j \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} = a^2$$

Faktor einführen

$$\underline{i}_S = k \left( i_{S1} + a \cdot i_{S2} + a^2 \cdot i_{S3} \right)$$

Beispiel sinusförmige Ströme  $i_{S1} = \sqrt{2} \cdot I_S \cdot \cos \omega t$

$$\underline{i}_{S1} = \sqrt{2} \cdot I_S \cdot k \left( \cos \omega t - \frac{1}{2} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + j \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{3} \right) - \cos \omega t - \frac{\pi}{3} \right] \right)$$

Additions...?

$$\begin{aligned} \underline{i}_{S1} = k \cdot \sqrt{2} \cdot I_S \left( \cos \omega t - \frac{1}{2} \cos \omega t \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \sin \omega t \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cos \omega t \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \sin \omega t \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \right. \\ \left. + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin \omega t \cdot \sin \frac{\pi}{3} - \cos \omega t \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \omega t \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\underline{i}_{S1} = k \cdot \sqrt{2} \cdot I_S \left( \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cdot \cos \omega t + j \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot \sin \omega t \right)$$

$$= k \cdot \sqrt{2} \cdot I_S \left( \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot \cos \omega t + j \frac{3}{2} \cdot \sin \omega t \right)$$

$$= k \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot I_S (\cos \omega t + j \sin \omega t) = k \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot I_S \cdot e^{j\omega t}$$

Wahl eines geeigneten Vorfaktors  $k$

Zeichnung

Bild 7.3: Darstellung eines Zeigers in der komplexen Ebene.

1) so, dass Projektion auf die Achse die Amplitude einer Phase ergibt  $\Rightarrow$  nicht leistungsvariant

Multiplikation der Definition mit  $\frac{2}{3}$

$$\underline{i}_{S1} = \frac{2}{3} (i_{S1} + a \cdot i_{S2} + a^2 \cdot i_{S3})$$

2) so, dass leistungsvariant (Späth)  
Vorfaktor

Nullsystem: Wenn  $\underline{e}_1; \underline{e}_2; \underline{e}_3$ ; Gleichanteile enthalten, wird das durch die Definition von  $\underline{i}_{S1}$  nicht ausgedrückt, z.B.

$$\underline{i}_{S1} = k (I + a \cdot I + a^2 \cdot I) = 0$$

d.h. besondere Betrachtung

Unitäre leistungsinvariante Transformation (Späth, Vogelmann)

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{u}^* \\ u_0 \end{bmatrix} = \operatorname{Re} \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{a}^2 \\ \underline{a} \end{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \underline{u} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} u_0 \quad (7.11)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{u}^* \\ u_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

Modifikation z.B. nach Depenbrock:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \underline{u} = \underline{u} = \frac{2}{3} (u_1 + \underline{a} u_2 + \underline{a}^2 u_3) \quad (7.13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} u_0 = u_0 = \frac{1}{3} (u_1 + u_2 + u_3) \quad (7.14)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \operatorname{Re} \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{a}^2 \\ \underline{a} \end{bmatrix} \underline{u} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_0 \quad (7.15)$$

### Transformiertes Spannungsgleichungssystem der Asynchronmaschine

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_{S1} \\ \underline{u}_{S1}^* \\ u_{S0} \\ \underline{u}'_{R1} \\ \underline{u}'_{R1}^* \\ u'_{R0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S & & & & & \\ & R_S & & & & \\ & & R_S & & & \\ & & & R'_R & & \\ & & & & R'_R & \\ & & & & & R'_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{i}}_{S1} \\ \dot{\underline{i}}_{S1}^* \\ i_{S0} \\ \dot{\underline{i}}'_{R1} \\ \dot{\underline{i}}'_{R1}^* \\ \dot{i}'_{R0} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} -\dot{\gamma}_S & & & & & \\ & \dot{\gamma}_S & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & -\dot{\gamma}_R & & \\ & & & & \dot{\gamma}_S & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Psi}_{S1} \\ \underline{\Psi}_{S1}^* \\ \Psi_{S0} \\ \underline{\Psi}'_{R1} \\ \underline{\Psi}'_{R1}^* \\ \Psi'_{R0} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{\Psi}_{S1} \\ \underline{\Psi}_{S1}^* \\ \Psi_{S0} \\ \underline{\Psi}'_{R1} \\ \underline{\Psi}'_{R1}^* \\ \Psi'_{R0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\Psi}_{S1} \\ \underline{\Psi}_{S1}^* \\ \Psi_{S0} \\ \underline{\Psi}'_{R1} \\ \underline{\Psi}'_{R1}^* \\ \Psi'_{R0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{Sh} + L_{S\sigma} & & & & & \\ & L_{Sh} + L_{S\sigma} & & & & \\ & & L_{S0} & & & \\ L_{Sh} & & & L_{Sh} + L'_{R\sigma} & & \\ & L_{Sh} & & & L_{Sh} + L'_{R\sigma} & \\ & & & & & L'_{R0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{i}}_{S1} \\ \dot{\underline{i}}_{S1}^* \\ i_{S0} \\ \dot{\underline{i}}'_{R1} \\ \dot{\underline{i}}'_{R1}^* \\ \dot{i}'_{R0} \end{bmatrix}$$

Die 2. Gleichung ist zur ersten konjugiert komplex und beschreibt daher keinen neuen Sachverhalt. Sie wird genauso wie die 5. Gleichung für die Lösung nicht gebraucht.

Wenn das System symmetrisch ist, treten keine Nullkomponenten auf und es verbleiben die 1. und die 4. Gleichung.

Für das innere Drehmoment gilt nach der Leistungsberechnung  $P_{mech} = \frac{1}{p} \cdot \dot{\gamma} \cdot M_{i1}$

oder

$$M_{i1} = \frac{P}{\dot{\gamma}} \operatorname{Re} \left\{ (\underline{i})^{*T} \cdot (\underline{F}) \cdot (\underline{\Psi}) \right\} \quad \text{weil} \quad \frac{d(\underline{L})}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned} M_{i1} &= \frac{P}{\dot{\gamma}} \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} (\underline{i}_S)^{*T} & (i_R)^{*T} \end{bmatrix} \cdot j \begin{bmatrix} (F_S) \\ (F_R) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\underline{L}_{SS}) & (\underline{L}_{SR}) \\ (L'_{SR}) & (L_{RR}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\underline{i}_S) \\ (i_R) \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{P}{\dot{\gamma}} \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} (\underline{i}_S)^{*T} \cdot j(\underline{F}_S) \\ (\underline{L}_{SR}) \cdot (i_S) + (L_{RR}) \cdot (i'_R) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\underline{L}_{SS}) \cdot (i_S) + (L_{SR}) \cdot (i'_R) \\ (\underline{L}_{SR}) \cdot (i_S) + (L_{RR}) \cdot (i'_R) \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Leistungsgleichung aus Spg.-Gl.:

$$(u) = \underline{R} \underline{i} + F \cdot \varphi + \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
 P_{el} &= (\underline{i})^{*T} (\underline{u}) = (\underline{i})^{*T} \cdot (\underline{R})(\underline{i}) + (\underline{i})^{*T} \cdot (\underline{F}) \cdot (\underline{\psi}) + (\underline{i})^{*T} \cdot \frac{\partial(\underline{\psi})}{\partial t} \\
 &= \frac{\partial \omega_m}{\partial t} + P_{ech}
 \end{aligned}$$

Wegen Leistungsinvarianz ist  
Stromwärmeverluste

$$P_{vel} = (\underline{i})^{*T} \cdot (\underline{F}) \cdot (\underline{i}) = (\underline{i})^T (R)(\underline{i})$$

und magnetische Energie

$$\omega_m = \frac{1}{2} (\underline{i})^{*T} \cdot (\underline{\psi}) = \frac{1}{2} \cdot (\underline{i})^T \cdot (\underline{\psi})$$

Gebraucht wird  $\frac{\partial \omega_m}{\partial t}$ :

$$\frac{\partial \omega_m}{\partial t} = \frac{1}{2} (\underline{i})^{*T} \cdot \frac{\partial(\underline{\psi})}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\underline{i})^{*T}}{\partial t} \cdot (\underline{\psi})$$

Es muss gelten:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\omega_m}{dt} + P_{mech} &= (\underline{i})^{*T} (\underline{F}) \cdot (\underline{\psi}) + (\underline{i})^{*T} \cdot \frac{\partial(\underline{\psi})}{\partial t} \quad \text{oder} \\
 P_{mech} &= (\underline{i})^{*T} (\underline{F}) \cdot (\underline{\psi}) + (\underline{i})^{*T} \cdot \frac{\partial(\underline{\psi})}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot (\underline{i})^{*T} \cdot \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(\underline{i})^{*T}}{\partial t} \cdot (\underline{\psi}) \\
 &= (\underline{i})^{*T} (\underline{F}) \cdot (\underline{\psi}) + \frac{1}{2} \cdot (\underline{i})^{*T} \cdot \frac{\partial(\underline{L})}{\partial t} (\underline{i}) + \frac{1}{2} \cdot (\underline{i})^{*T} \cdot (\underline{L}) \cdot \frac{\partial(\underline{i})}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial(\underline{i})^{*T}}{\partial t} \cdot (\underline{\psi})
 \end{aligned}$$

$P_{mech}$  muss reell sein  $P_{mech} = \text{Re}\{\dots\}$  oder

$$P_{mech} = \frac{P_{mech1} + P_{mech1}^{*T}}{2} \quad \text{d.h., es ist } P_{mech}^{*T} \text{ zu bilden.}$$

Es ist

$$\{(A) \cdot (B) \cdot (C)\}^{*T} = (C)^* \cdot (B)^* \cdot (A)^*$$

$$P_{mech}^{*T} = \left[ (\underline{i})^{*T} \cdot (\underline{F}) \cdot (\underline{\psi}) \right]^{*T} + \frac{1}{2} \cdot (\underline{i})^{*T} \cdot \frac{\partial(\underline{L})}{\partial t} (\underline{i}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(\underline{i})^{*T}}{\partial t} \cdot (\underline{L}) \cdot (\underline{i}) - \frac{1}{2} \cdot (\underline{\psi})^{*T} \cdot \frac{\partial(\underline{i})^{*T}}{\partial t}$$

Die Addition ergibt:

$$P_{mech} = \text{Re} \left\{ (\underline{i})^{*T} \cdot (\underline{F}) \cdot (\underline{\psi}) \right\} + \frac{1}{2} \cdot (\underline{i})^{*T} \cdot \frac{\partial(\underline{L})}{\partial t} \cdot (\underline{i})$$

$$P_{mech} = \Omega \cdot M_{i1} = \frac{\dot{\gamma}}{P} \cdot M_i$$

Grund für Transformation  $\frac{\partial(L)}{dt} = (0)$  dann ist  $P_{mech} =$

Ausmultipliziert mit  $(\underline{F})$  ergibt das:

$$M_{i1} = \frac{P}{\dot{\gamma}} \cdot \text{Re} \left\{ \begin{matrix} \dot{i}_{Sn}^* \\ \dot{i}_{S1} \\ \dot{i}_{S0} \\ \dot{i}_{R1}^* \\ \dot{i}_R \\ \dot{i}_{R0} \end{matrix} \cdot j \cdot \begin{matrix} \left( (L_{Sh} + L_{S\sigma}) \cdot \dot{i}_{S1} + L_{Sh} \cdot \dot{i}'_{R1} \right) \left( -\dot{\gamma}_S \right) \\ \left( (L_{Sh} + L_{S\sigma}) \cdot \dot{i}_{S1}^* + L_{Sh} \cdot \dot{i}^*_{R1} \right) \cdot \dot{\gamma}_S \\ 0 \\ \left( L_{Sh} \cdot \dot{i}_{S1}^* + (L_{Sh} + L_{R\sigma}) \dot{i}'_{R1} \right) \cdot \left( -\dot{\gamma}_R \right) \\ \left( L_{Sh} \cdot \dot{i}_{S1}^* + (L_{Sh} + L_{R\sigma}) \dot{i}^*_{R1} \right) \cdot \dot{\gamma}_R \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} & (L_{Sh} + L_{S\sigma}) \cdot \dot{i}_{S1} \cdot \dot{i}_{S1}^* \cdot \left( -\dot{\gamma}_S \right) + L_{Sh} \cdot \dot{i}'_{R1} \cdot \dot{i}_{S1}^* \cdot \left( -\dot{\gamma}_S \right) \\ & + (L_{Sh} + L_{S\sigma}) \cdot \dot{i}_{S1}^* \cdot \dot{i}_{S1} \cdot \dot{\gamma}_S + L_{Sh} \cdot \dot{i}^*_{R1} \cdot \dot{i}_{S1} \cdot \dot{\gamma}_S \\ & L_{Sh} \cdot \dot{i}_{S1} \cdot \dot{i}'_{R1} \cdot \left( -\dot{\gamma}_R \right) + (L_{Sh} + L_{R\sigma}) \cdot \dot{i}'_{R1} \cdot \dot{i}^*_{R1} \cdot \left( -\dot{\gamma}_R \right) \\ & L_{Sh} \cdot \dot{i}_{S1}^* \cdot \dot{i}'_{R1} \cdot \dot{\gamma}_R + (L_{Sh} + L_{R\sigma}) \cdot \dot{i}^*_{R1} \cdot \dot{i}'_{R1} \cdot \dot{\gamma}_R \end{aligned}$$

Wegen  $\dot{\gamma} = -\dot{\gamma}_S + \dot{\gamma}_R$  bzw.  $\dot{\gamma} = -\dot{\gamma}_S + \dot{\gamma}_R$  kann man zusammenfassen:

$$L_{Sh} \cdot \dot{i}_{S1} \cdot \dot{i}'_{R1} \cdot \underbrace{\left( -\dot{\gamma}_S + \dot{\gamma}_R \right)}_{\dot{\gamma}} - L_{Sh} \cdot \dot{i}_{S1} \cdot \dot{i}^*_{R1} \cdot \underbrace{\left( -\dot{\gamma}_S + \dot{\gamma}_R \right)}_{\dot{\gamma}}$$

Oder

$$M_i = \frac{P}{\dot{\gamma}} \cdot \text{Re} \left\{ \dot{\gamma} \cdot j \cdot L_{Sh} \left( \dot{i}_{S1} \cdot \underbrace{\dot{i}'_{R1} - \dot{i}_{S1}}_{\text{konjugent komplex}} \cdot \dot{i}^*_{R1} \right) \right\}$$

**Zwischenrechnung:**

Wenn  $\dot{i}_{S1} \cdot \dot{i}^*_{R1} = c$  eine komplexe Zahl  $c = d + je$  ist, dann gilt:

$$\operatorname{Re}\{j(c^* - c)\} = \operatorname{Re}\{j \cdot c^*\} - \operatorname{Re}\{j \cdot c\}$$

$$\operatorname{Re}\{j(d + je)\} = \operatorname{Re}\{jd - e\} = -\operatorname{Im}\{c\}$$

$$\operatorname{Re}\{j(d - je)\} = \operatorname{Re}\{jd + e\} = \operatorname{Im}\{c\}$$

$$\operatorname{Re}\{j(c^* - c)\} = \operatorname{Im}\{c\} - (-\operatorname{Im}\{c\}) = 2 \cdot \operatorname{Im}\{c\}$$

$$M_i = p \cdot L_{Sh} \cdot 2 \cdot \operatorname{Im}\{i_{S1} \cdot i_{R1}^*\}$$

Produktgröße Hinweis auf GM

## 7.2 Beispiel:

Schleifringläufer am starren Netz

offene Rotorklemmen  $\gamma \neq 0; \dot{\gamma} = 0$

Bezugssystem  $\gamma_S = -\omega_S \cdot t$

Welcher Rotorspannungsraumzeiger ergibt sich?

Aus der symmetrischen Spannung wird allgemein

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot u_S \cdot e^{j\omega_S \cdot t} \cdot e^{j\gamma_S}$$

$$\gamma_R = \gamma + \gamma_S$$

$$\dot{\gamma}_R = \dot{\gamma} + \dot{\gamma}_S \quad \dot{\gamma}_R = \dot{\gamma}_S$$

## ZEICHNUNG

Bild 7.4: Darstellung eines Zeigers in der komplexen Ebene.

$$\text{Bezugssystem } \gamma_S = -\omega_S \cdot t \quad \dot{\gamma}_S = -\omega_S = \dot{\gamma}_R$$

Aus der Systemgl. wird

$$\underline{u}_{S1} = R_S \cdot i_{S1} + j\omega_S \left( (L_{Sh} + L_{S\sigma}) \cdot i_{S1} + L_{Sh} \cdot i'_{R1} \right) \quad (7.16)$$

$$\underline{u}'_{R1} = R'_R \cdot i'_{R1} + j\omega_S \left( L_{Sh} \cdot i_{S1} + (L_{Sh} + L_{S\sigma}) \cdot i'_{R1} \right) \quad (7.17)$$

Wegen offenen Rotorklemmen ist  $i'_{R1} = 0$

Aus Gleichung (1) wird

$$\underline{i}_{S1} = \frac{\underline{u}_{S1}}{R_S + j\omega_S (L_{Sh} + L_{S\sigma})}$$

In die zweite Gleichung eingesetzt

$$\underline{u}'_{R1} = \frac{j\omega_S \cdot L_{Sh}}{R_S + j\omega_S (L_{Sh} + L_{S\sigma})} \cdot \underline{u}_{S1}$$

Mit dem Spannungsraumzeiger  $\underline{u}_{S1}$  und  $\gamma_S = -\omega_S \cdot t$  wird daraus

$$\underline{u}'_{R1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{j\omega_S \cdot L_{Sh}}{R_S + j\omega_S (L_{Sh} + L_{S\sigma})} \cdot u_S$$

$\underline{u}_{S1}$  ist reell

der Ausdruck  $\frac{j\omega_S \cdot L_{Sh}}{R_S + j\omega_S (L_{Sh} + L_{S\sigma})}$  hat einen kleinen pos. Winkel

SKIZZE

Bild 7.5: Darstellung eines Zeigers in der komplexen Ebene.

$$\gamma_S = -\omega_S \cdot t$$

Bezugsachse rotiert synchron mit dem Spannungsraumzeiger des Netzes

Wie groß ist der  $\text{Re}\{j(c^* - c)\}$  ?

SKIZZE

Bild 7.6: Darstellung eines Zeigers in der komplexen Ebene.

Drehung um  $j$ :

$$j \cdot (-2j \cdot \text{Im}\{\underline{c}\}) = 2 \cdot \text{Im}\{\underline{c}\}$$

$$\text{Re}\{j(\underline{c}^* - \underline{c})\} = 2 \cdot \text{Im}\{\underline{c}\}$$

Raumzeiger: Aus

$$M_{i1} = 2p \cdot L_{Sh} \cdot \text{Im}\{\underline{i}_{S1} \cdot \underline{i}'_{R1}^*\}$$

wird

SKIZZE

Bild 7.7: Darstellung eines Zeigers in der komplexen Ebene.

$$M_i = 2p \cdot L_{Sh} |\underline{i}_{S1}| \cdot |\underline{i}'_{R1}| \sin \Delta$$

Bei ASM kann  $\angle \underline{i}_{S1}$  und  $\underline{i}_{R1}$  nicht auf  $90^\circ$  gebracht werden.

$$\underline{i}_\mu = \underline{i}_{S1} + \underline{i}'_{R1}$$

Zusammen mit der mech. Gleichung

$$M_{i1} = J \cdot \frac{1}{p} \cdot \ddot{\gamma} + M_L$$

ist das System vollständig beschrieben.

Ein Gleichanteil für das Drehmoment kann nur aus gleichfrequenten Anteilen entstehen.

Sonderfall des stationären Betriebs bei kurzgeschlossenem

- Rotor ( $u'_{R1} = 0; u'_{R0} = 0$ )
- Konstante Drehzahl  $\dot{j} = const.$
- Statorspeisung mit sgm. System, Spannungsraumzeiger wird

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot u_S \cdot e^{j(\omega_S \cdot t - \gamma_S)}$$

- $M_L = const.$

Wahl der Bezugsachse:

$$\begin{aligned} \gamma_S &= -\omega_S \cdot t & \gamma_R &= -\omega_S \cdot t + \gamma \\ \dot{\gamma}_S &= -\omega_S & \dot{\gamma}_R &= -\left(\omega_S - \dot{\gamma}\right) = -s \cdot \omega_S \end{aligned}$$

$$\underline{u}_{S1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot u_S \quad u_{S0} = 0$$

damit aus der 3. Gleichung bei verschwindendem Anfangswert  $i'_{S0} = 0$

ebenso liefert die 6. Gleichung aus

$$u'_{R0} = 0 \quad i'_{R0} = 0$$

Die 1. und die 4. Gleichung ergeben für diesen stationären Fall:

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot u = R_S \cdot \underline{i}_S + j\omega_S \cdot \underline{\Psi}_{S1}$$

$$0 = R'_R \cdot \underline{i}'_{R1} - \dot{\gamma}_R \cdot \underline{\Psi}_{R1} \quad \dot{\gamma}_R = -\left(\omega_S - \dot{\gamma}\right)$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot u_S = R_S \cdot \underline{i}_S + j\omega_S \cdot \underline{\psi}_{S1}$$

$$0 = R'_R \cdot \underline{i}'_{R1} + \gamma \left( \omega_S - \dot{\gamma} \right) \cdot \underline{\psi}'_{R1}$$

Diese beiden Gleichungen führen zu dem klassischen Ersatzschaltbild

### ZEICHNUNG

Bild 7.8: Darstellung eines Zeigers in der komplexen Ebene.

Aufgeschlüsselt:  $u_S$  in die reelle Achse gelegt.

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot u_S = R_S \cdot \underline{i}_{S1} + j\omega_S \left[ (L_{Sh} + L_{S\sigma}) \cdot \underline{i}_{S1} + L_{Sh} \cdot \underline{i}'_{R1} \right]$$

$$0 = R'_R \cdot \underline{i}'_{R1} + j\omega_S \left[ L_{Sh} \cdot \underline{i}_{S1} + (L_{Sh} + L_{S\sigma}) \cdot \underline{i}'_{R1} \right]$$

Für die Lösung des Systems sind  $u_S$ ,  $\omega_S$  und  $\dot{\gamma}$  gegeben.

$\underline{i}_{S1}$  und  $\underline{i}'_{R1}$  sind zu berechnen.

Lösungsansatz für die Ströme wie bei der kompl. Wechselstromrechnung

$$\underline{i}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{I}_S = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot I_S \cdot e^{-j\varphi_S}$$

$$\underline{i}'_{R1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{I}'_R = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot I'_R \cdot e^{-j\varphi_R}$$

### ZEICHNUNG

Bild 7.9: Darstellung eines Zeigers in der komplexen Ebene.

In dem mit  $\omega_S$  rotierenden System sind der Rotorspannungsraumzeiger und der Ständerspannungsraumzeiger konstant.

Definition von  $\underline{u}'_{R1}$

$$\begin{bmatrix} \underline{u}'_{R1} \\ \underline{u}'_{R1}^* \\ \underline{u}_{R0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j\gamma_R} & & \\ & e^{-j\gamma_R} & \\ & & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}'_{R1} \\ \underline{u}'_{R1} \\ \underline{u}'_{R3} \end{bmatrix}$$

oder

$$\underline{u}'_{R1} = \frac{1}{\sqrt{3}} (u'_{R1} + a \cdot u'_{R2} + a^2 \cdot u'_{R3}) \cdot e^{j\gamma_R}$$

Dieser Spannungsraumzeiger wird aus der Gleichung berechnet.

Weiterhin ist  $\gamma_R = \gamma_S + \gamma$  eingesetzt:

$$\underline{u}'_{R1} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}} (u'_{R1} + a \cdot u'_{R2} + a^2 \cdot u'_{R3})}_{\text{dieser Anteil wird messtechn. erfasst}} \cdot \underbrace{e^{j\gamma_S}}_{\text{Drehung mit VD und } \gamma_S = -\omega_S \cdot t} \cdot e^{j\gamma}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (u'_{R1} + a \cdot u'_{R2} + a^2 \cdot u'_{R3}) \cdot e^{-j\omega_S \cdot t} = \underline{u}'_{R1} \cdot e^{-j\gamma}$$

### SKIZZE

Bild 7.10: Darstellung eines Zeigers in der komplexen Ebene.

Ergebnis:

Der aus der Rechnung ermittelte RZ  $\underline{u}'_{R1}$  wird um den Winkel  $\gamma$  gedreht.



## 7 Rücktransformation

### 7.1 Drehmomentgleichungen

Rücktransformation:

$$(i_S) = (C_S) \cdot (\underline{i}_S)$$

$$(i_S) = (C_S) \cdot (\underline{i}_S) = (X) \begin{bmatrix} e^{j\omega_S t} & & \\ & e^{-j\omega_S t} & \\ & & 1 \end{bmatrix} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} \underline{I}_S \\ \underline{I}_S^* \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(i_S) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{j\omega_S t} & & \\ & e^{-j\omega_S t} & \\ & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_S \cdot e^{-j\varphi_S} \\ I_S \cdot e^{j\varphi_S} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{I_S}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{j(\omega_S t - \varphi_S)} + e^{-j(\omega_S t - \varphi_S)} \\ a^2 e^{j(\omega_S t - \varphi_S)} + a \cdot e^{-j(\omega_S t - \varphi_S)} \\ a \cdot e^{j(\omega_S t - \varphi_S)} + a^2 e^{-j(\omega_S t - \varphi_S)} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{I_S}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 \cdot \cos(\omega t - \varphi_S) \\ e^{j\left(\omega_S \cdot t - \varphi_S - \frac{2\pi}{3}\right)} + e^{-j\left(\omega_S \cdot t - \varphi_S - \frac{2\pi}{3}\right)} \\ e^{j\left(\omega_S \cdot t - \varphi_S - \frac{4\pi}{3}\right)} + e^{-j\left(\omega_S \cdot t - \varphi_S - \frac{4\pi}{3}\right)} \end{bmatrix} = \sqrt{2} \cdot I_S \begin{bmatrix} \cos(\omega t - \varphi_S) \\ \cos\left(\omega t - \varphi_S - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\omega t - \varphi_S - \frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

Entsprechend wird für die Rotorströme:

$$\gamma_R = \gamma - \omega_S \cdot t$$

$$(i_R) = \ddot{u}(C_R) \cdot (\underline{i}_R) = \ddot{u}(X) \begin{bmatrix} e^{js\omega_S t} & & \\ & e^{-js\omega_S t} & \\ & & 1 \end{bmatrix} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} \underline{I}'_R \\ \underline{I}'_R^* \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(i_R) = \sqrt{2} \underbrace{\ddot{u}}_{I'_R} \begin{bmatrix} \cos(s\omega_S t - \varphi_R) \\ \cos\left(s\omega_S t - \varphi_R - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(s\omega_S t - \varphi_R - \frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$I_S$ ,  $\varphi_S$ ,  $I'_R$  und  $\varphi_R$  sind aus den beiden obigen komplexen Gleichungen zu bestimmen.

Bemerkung zum Bezugssystem:

$$M_i = M_L + \frac{1}{p} \cdot \frac{\partial \dot{\gamma}}{dt}$$

$(u_s)$ ;  $M_L$  gegeben  $\rightarrow$  nichtlineare Gleichung

Lösung auf Digitalrechner

Andere Schreibweisen für das innere Drehmoment

a) Aus der Flussbeziehung:

$$\underline{\Psi}_{S1} = (L_{Sh} + L_{S\sigma}) \underline{i}_{S1} + L_{Sh} \cdot \underline{i}'_{R1}$$

$$\underline{i}'_{R1} = \frac{1}{L_{Sh}} \underline{\Psi}_{S1} - \frac{L_{Sh} + L_{S\sigma}}{L_{Sh}} \underline{i}_{S1} \quad ,$$

Einsetzen in  $M_{i1}$  ergibt:

$$M_{i1} = 2 \cdot p \cdot L_{Sh} \cdot \text{Im} \left\{ \underline{i}_{S1} \cdot \frac{1}{L_{Sh}} \cdot \underline{\Psi}_{S1}^* - \underline{i}_{S1} \underbrace{\frac{(L_{Sh} + L_{S\sigma})}{L_{Sh}}}_{\substack{\text{reell} \\ \text{Im}(\dots)=0}} \cdot \underline{i}_{S1}^* \right\}$$

$$M_{i1} = 2p \cdot \text{Im} \{ \underline{i}_{S1} \underline{\Psi}_{S1}^* \}$$

Diese Version eignet sich zur Bestimmung von  $M_{i1}$  aus gemessenen Statorgrößen (Bezugssystem  $\gamma_s = 0$ ).

$\underline{\Psi}_{S1}$  gewinnt man mittels Integration aus der Statorgleichung

$$\underline{u}_{S1} = R_s \underline{i}_{S1} + \dot{\underline{\Psi}}_{S1}$$

$\underline{u}_{S1}$  und  $\underline{i}_{S1}$  sind messbar ( $\gamma_s = 0$ ).

Durch Aufspalten in Real- und Imaginärteil

$$\underline{i}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (i_{Sp} + j i_{Sq})$$

$$\underline{\Psi}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{Sp} + j \Psi_{Sq})$$

findet man die in der Literatur häufig anzutreffende Form

$$M_{i1} = p (\Psi_{Sp} i_{Sq} - \Psi_{Sq} i_{Sp})$$

b) Aus der Flussbeziehung

$$\underline{\Psi}'_{R1} = L_{Sh} \cdot \underline{i}_{S1} + (L_{Sh} + L'_{R\sigma}) \cdot \underline{i}'_{R1}$$

$$\underline{i}_{S1} = \frac{1}{L_{Sh}} \underline{\psi}'_{R1} - \frac{L_{Sh} + L'_{R\sigma}}{L_{Sh}} \underline{i}'_{R1}$$

Einsetzen in  $M_{i1}$  ergibt:

$$M_{i1} = 2 \cdot p \cdot L_{Sh} \cdot \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{L_{Sh}} \cdot \underline{\psi}'_{R1} \cdot \underline{i}'_{R1*} - \underbrace{\frac{(L_{Sh} + L_{R\sigma})}{L_{Sh}}}_{\substack{\text{reell} \\ \operatorname{Im}(\dots)=0}} \underline{i}'_{R1} \cdot \underline{i}'_{R1*} \right\}$$

$$\boxed{M_{i1} = 2p \cdot \operatorname{Im} \{ \underline{\psi}'_{R1} \cdot \underline{i}'_{R1*} \}}$$

Diese Version ermöglicht die Bestimmung von  $M_{i1}$  aus gemessenen Rotorgrößen (geeignet bei Rotorspeisung von Schleifringläufern Bezugssystem  $\gamma_R = 0$ ).

- c) Wenn man die Ströme durch die Flüsse aus ...? erhält man für das Drehmoment ???. Es wird die Inv .... der Flussmatrix gebildet und eingesetzt (siehe S. ?? dynamische Struktur der ASM).

$$M_i = 2p \cdot \frac{1-\sigma}{\sigma \cdot L_{Sh}} \cdot \operatorname{Im} \{ \underline{\psi}_{S1} \cdot \underline{\psi}_{R1}^* \}$$

$\sigma$  = totale Streuziffer

Grundsätzlich gilt: Flüsse lassen sich durch Ströme ausdrücken

$$\underline{\psi} = f(i) \quad \text{und} \quad i = g(\underline{\psi})$$

Allgemeines zur Wahl des Bezugssystems (Beispiele)

- a)  $\gamma_S = 0$  Bezugsachse liegt auf der ersten Ständerachse  $\rightarrow$  ständerfest

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \gamma_R = \gamma \quad \dot{\gamma}_R = \dot{\gamma}$$

( $C_S$ ) ist zeitvariant, d.h. im Stator treten keine rotatorischen Spannungen auf.

Speisung mit konstanter Spannung und Frequenz.

Spannungsraumzeiger:

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot u_S \cdot e^{j\omega_S t}$$

Im stationären Betrieb sind auch  $\underline{i}_{S1}$  und  $\underline{i}'_{R1}$  mit  $\omega_S$  umlaufende Raumzeiger mit konstantem Betrag.

$$\omega_S = \dot{\gamma} + s \cdot \omega_S$$

Bild 7.1: Def. der Winkel

Vom Ständer aus betrachtet hat  $\underline{\psi}_{S1} \cdot \omega_S$ .

Rotor hat  $\dot{\gamma} \Rightarrow$  Rotorgrößen haben  $s \cdot \omega_S$

b)  $\gamma_R = 0$  Bezugsachse liegt auf der ersten Rotorwicklung  $\rightarrow$  rotorfestes Bezugssystem.

$(C_R)$  ist zeitinvariant, weil  $\gamma_R = 0$  ist.

Im Rotor treten durch die  $(F)$ -Matrix keine rotatorischen Spannungen auf.

Die Winkel sind:  $\gamma = -\gamma_S + \gamma_R$

$$\gamma_S = -\gamma \quad \text{und} \quad \dot{\gamma} = -\dot{\gamma}$$

Speisung mit konstanter Spannung und Frequenz.

Raumzeiger:

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot u_S \cdot e^{j(\omega_S t - \gamma)}$$

## ZEICHNUNG

Bild 7.2: Def. der Winkel

Ständerfluss  $\psi_S$  bewegt sich mit  $s \cdot \omega_S$  am Rotor vorbei.

Fluss hat Frequenz  $\omega_S - \dot{\gamma} = s \cdot \omega_S$

D.h. alle Raumzeiger laufen in diesem rotorbezogenen System mit der Schlupffrequenz  $s \cdot \omega_S$  um.

c)  $\gamma_S = -\omega_S \cdot t + \gamma_{S0}$  Flussbezogenes Bezugssystem

Bezugsachse liegt z.B. auf Ständerfluss, der mit  $\omega_S$  rotiert und einen Nullphasenwinkel hat.

Es ist:

$$\begin{array}{lll} \gamma = -\gamma_S + \gamma_R & \gamma_S = -\omega_S \cdot t + \gamma_{S0} & \gamma_R = -\omega_S \cdot t + \gamma + \gamma_{S0} \\ \dot{\gamma} = -\omega_S & & \dot{\gamma}_R = -\left(\omega_S - \dot{\gamma}\right) = -s \cdot \omega_S \end{array}$$

Speisung mit symmetrischem System.

Spannungsraumzeiger:

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot u_S \cdot e^{j\omega_S t - \omega_S t + \gamma_{S0}}$$

Im stationären Betrieb sind  $\underline{i}_{S1}$  und  $\underline{i}'_{R1}$  zeitlich konstant.

### ZEICHNUNG

Bild 7.3: Def. der Winkel

Der Rotor bleibt um den Winkel  $\alpha\gamma_R$  zurück. Auf dem Rotor sind die Frequenzen

$s \cdot \omega_s$ , d.h. es erscheint  $\underline{i}''_{R1}$  als zeitlich konstant.

Damit RZ still steht und konstant und reell ist:

Für  $\gamma_s = -\omega_s \cdot t$ , d.h. bei mit  $\omega_s$  relativ zum Stator ??? positiv umlaufender Bezugssachse, wird der Raumzeiger zeitlich konstant und reell

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot u_s$$

Die Nullkomponente verschwindet bei einem symmetrischen sinusförmigen System.

### ZEICHNUNG

Bild 7.4: Def. der Winkel

Falls z.B. der Strom eine Phasenverschiebung  $\varphi$  hat

$$\underline{i}_{S1} = \frac{\sqrt{2} \cdot u_{S1}}{X} \cos(\omega t - \varphi) \quad \underline{i}_{S1} = \sqrt{2} \cdot \underline{I}_1 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\varphi}$$

Raumzeiger mit  $\gamma_s = -\omega \cdot t$  Bezugssystem

$$\underline{i}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot I_s \cdot e^{-j\varphi}$$

### BILDER

Bild 7.5: Def. der Winkel

Beispiel: Berechnung einer Leistung

$$P_S(t) = (\underline{i}_S)^T \cdot (\underline{u}_S) = \begin{pmatrix} i_{S1} \\ i_{S2} \\ i_{S3} \end{pmatrix} (u_{S1}, u_{S2}, u_{S3})$$

$$P_S(t) = (\underline{i}_S)^{*T} \cdot (\underline{u}_S) = (\underline{i}_{S1}^*, i_{S1}, i_{S0}) \begin{pmatrix} \underline{u}_{S1} \\ u_{S1}^* \\ u_{S0} \end{pmatrix} = \underbrace{i_{S1}^* \cdot u_{S1}}_{\underline{X}} + \underbrace{i_{S1} \cdot u_{S1}^*}_{\underline{X}^*} + i_{S0} \cdot u_{S0}$$



## 8 Speisung der Drehstromasynchronmaschine mit nichtsinusförmigem Spannungs- und Stromsystem

### 8.1 Nichtsinusförmiges Spannungs- und Stromsystem

Das speisende Drehstromsystem sei symmetrisch, aber nicht sinusförmig. Das bedeutet, daß die drei Spannungen um jeweils  $120^\circ$  gegeneinander verschoben sind. Es wird im folgenden untersucht welche Harmonischen im Raumzeiger und welche in der Nullkomponente mit welchen Eigenschaften vorkommen. Die drei Spannungen in den Phasen werden dazu als Fourierreihe dargestellt, bei der alle Harmonische vorkommen können.

$$u_{Si} = \sqrt{2} \cdot \sum_{v=1}^{\infty} U_{Sv} \cdot \cos \left\{ v \cdot \left( \omega_s \cdot t - (i-1) \frac{2\pi}{3} \right) + \varphi_v \right\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (8.1)$$

Die Berechnung der Raumzeiger und der Nullkomponenten für die Harmonischen ergibt

$$\underline{u}_{Sv} = u_{Sv} \cdot e^{j\varphi_v}$$

Allgemein gilt für den Zeitwert aus dem komplexen Zeitwert (wegen cos-Funktion) mit

$$u = \frac{\underline{u} + \underline{u}^*}{2} \quad \text{Für die Phasenspannungen ist:}$$

$$u_{Si} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \left[ \underline{U}_{Sv} \cdot a^{-v(i-1)} \cdot e^{jv \cdot \omega_s t} + \underline{U}_{Sv}^* \cdot a^{v(i-1)} \cdot e^{-jv \cdot \omega_s t} \right] \quad i = \{1, 2, 3\} \quad (8.2)$$

Die Definition des Raumzeigers ist:

$$\underline{u}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (u_{S1} + \underline{a} \cdot u_{S2} + \underline{a}^2 \cdot u_{S3}) \cdot e^{j\gamma_s} \quad (8.3)$$

Die drei Spannungen in der komplexen Form in die Definition des Spannungsraumzeigers eingesetzt:

$$\underline{u}_{S1v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left( 1 \cdot \underline{a}^0 + \underline{a} \cdot \underline{a}^{-v} + \underline{a}^2 \cdot \underline{a}^{-2v} \right) \cdot \underline{u}_{Sv} \cdot e^{jv \cdot \omega_s t} \\ & + \left( 1 \cdot \underline{a}^0 + \underline{a} \cdot \underline{a}^{-v} + \underline{a}^2 \cdot \underline{a}^{-2v} \right) \cdot \underline{u}_{Sv}^* \cdot e^{-jv \cdot \omega_s t} \end{aligned} \right\} \cdot e^{j\gamma_s} \quad (8.4)$$

Mit 3 erweitern und zusammenfassen ergibt:

$$\underline{u}_{S1v} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \left[ \left( 1 + \underline{a}^{1-v} + \underline{a}^{2(1-v)} \right) \cdot \underline{u}_{Sv} \cdot e^{jv \cdot \omega_s t} + \left( 1 + \underline{a}^{1+v} + \underline{a}^{2(1+v)} \right) \cdot \underline{u}_{Sv}^* \cdot e^{-jv \cdot \omega_s t} \right] \cdot e^{j\gamma_s} \quad (8.5)$$

Der allgemeine Raumzeiger ergibt sich durch Summierung über alle Oberschwingungen  $v = 1 \dots \infty$ , daher

$$\underline{u}_{S1} = \sum_{v=1}^{\infty} \underline{u}_{S1v} \quad (8.6)$$

Für die Nullkomponente erhält man entsprechend der Definition:

$$u_{S0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (u_{S1} + u_{S2} + u_{S3})$$

Die komplexen Zeitwerte eingesetzt:

$$u_{S0v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left( (a^0 + a^{-v} + a^{-2v}) \cdot e^{jv \cdot \omega_s t} \cdot \underline{u}_v + (a^0 + a^{-v} + a^{2v}) \cdot \underline{u}_{Sv}^* \cdot e^{-jv \cdot \omega_s t} \right)$$

$$\underline{u}_{S0v} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{(1 + a^{-v} + a^{-2v})}{3} \cdot \underline{u}_{Sv} \cdot e^{jv \cdot \omega_s t} \right\} \quad (8.7)$$

Gesamte Nullkomponente

$$\underline{u}_{S0} = \sum_{v=1}^{\infty} \underline{u}_{S0v} \quad (8.8)$$

Nun sollen die Ergebnisse genauer analysiert werden. Dazu betrachtet man die Eigenschaft jeder Harmonischen getrennt.

**Grundschwingung:**  $\boxed{v=1}$  :

Der Spannungsraumzeiger  $\underline{u}_{S1}$  für die Grundschwingung wurde schon berechnet, weshalb man hier nur das Ergebnis angibt.

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot U_S \cdot e^{j\omega_s t} \cdot e^{j\gamma_S} \cdot e^{j\varphi_S} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{U}_{S1} \cdot e^{j\omega_s t} \cdot e^{j\gamma_S}$$

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{U}_{S1} \cdot e^{j\omega_s t} \cdot e^{j\gamma_S} \quad (8.9)$$

**Harmonische**  $\boxed{v=2}$  :

Die Zeitwerte sind  $\sqrt{2} \cdot U_{S2} \cdot \cos \left\{ 2 \cdot \left( \omega_s t - (i-1) \cdot \frac{2\pi}{3} \right) + \varphi_2 \right\}$

Daraus die komplexen Zeitwerte der drei Phasen

$$\sqrt{2} \cdot U_{S2} \cdot e^{j2 \left( \omega_s t - (i-1) \cdot \frac{2\pi}{3} \right)} \cdot e^{j\varphi_2} = \sqrt{2} \cdot U_{S2} \cdot e^{j2 \cdot \omega_s t} \cdot \underbrace{e^{-j2 \cdot (i-1) \cdot \frac{2\pi}{3}}}_{a^{2 \cdot 2(i-1)} = a^{i-1}} \cdot e^{j\varphi_2} \quad i = \{1, 2, 3\}$$

Oder vereinfacht  $\sqrt{2} \cdot U_{S2} \cdot e^{j2\omega_s t} \cdot e^{j\varphi_2} \cdot a^{(i-1)}$

Daher werden die komplexen Zeitwerte

$$\underline{u}_{Sa} = \sqrt{2} \cdot U_{S2} \cdot e^{j\omega_s \cdot 2t} \cdot e^{j\varphi_2} \cdot a^0$$

$$\underline{u}_{Sb} = \sqrt{2} \cdot U_{S2} \cdot e^{j2\omega_s t} \cdot e^{j\varphi_2} \cdot a$$

$$\underline{u}_{Sc} = \sqrt{2} \cdot U_{S2} \cdot e^{j2\omega_s t} \cdot e^{j\varphi_2} \cdot a^2$$

Raumzeiger mit der Definition berechnen:

$$\underline{u}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_{S1} + a \cdot u_{S2} + a^2 \cdot u_{S3})$$

$$\underline{u}_{S2} = \frac{e^{j\gamma_S}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot u_{S2}}{2} \left\{ \underbrace{(1 + a \cdot a + a^2 \cdot a^2)}_0 \cdot e^{j2 \cdot \omega_s t} \cdot e^{j\varphi_2} + \underbrace{(1 + a \cdot a^2 + a^2 \cdot a)}_3 \cdot e^{-j2 \cdot \omega_s t} \cdot e^{-j\varphi_2} \right\}$$

Und vereinfacht

$$\underline{u}_{S2} = e^{j\gamma_S} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot U_{S2} \cdot e^{-j2 \cdot \omega_S \cdot t} \cdot e^{-j\varphi_2} = e^{j\gamma_S} \cdot \underline{U}_{S2}^* \cdot e^{-j2 \cdot \omega_S \cdot t} \quad (8.10)$$

**Harmonische**  $\boxed{v=3}$ :

$$\text{Zeitwerte} \quad \sqrt{2} \cdot U_{S3} \cdot \cos \left\{ 3 \cdot \left( \omega_S \cdot t - (i-1) \frac{2\pi}{3} \right) - \varphi_3 \right\}$$

Die komplexen Zeitwerte der drei Phasen sind:

$$\sqrt{2} \cdot U_{S3} \cdot e^{j3 \left( \omega_S \cdot t - (i-1) \frac{2\pi}{3} \right)} \cdot e^{j\varphi_3} = \sqrt{2} \cdot U_{S3} \cdot e^{j3 \cdot \omega_S \cdot t} \cdot \underbrace{e^{-j3(i-1) \frac{2\pi}{3}}}_{a^{23(i-1)=1}} \cdot e^{j\varphi_3}$$

Vereinfacht sieht man, daß alle drei Phasen den gleichen komplexen Zeitwert besitzen.

$$\sqrt{2} \cdot U_{S3} \cdot e^{j3 \cdot \omega_S \cdot t} \cdot e^{j\varphi_3}$$

Wie bei der 2. Harmonischen den Raumzeiger berechnet

$$\underline{u}_{S3} = \frac{e^{j\gamma_S}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot U_{S3}}{2} \left\{ \underbrace{(1+a+a^2)}_0 \cdot e^{j3 \cdot \omega_S \cdot t} \cdot e^{j\varphi_3} + \underbrace{(1+a^2 \cdot 1+a \cdot 1)}_0 \cdot e^{-j3 \cdot \omega_S \cdot t} \cdot e^{-j\varphi_3} \right\}$$

$$\boxed{\underline{u}_{S3} = 0} \quad (8.11)$$

Aus dem Ergebnis kann man erkennen, daß die durch 3 teilbaren OS im RZ nicht auftreten.

Es wird noch kontrolliert ob eine Nullkomponente auftritt.

$$u_{S03} = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_{S1} + u_{S2} + u_{S3}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot U_{S3}}{2} \cdot \{ e^{j3 \cdot \omega_S \cdot t} \cdot e^{j\varphi_3} + e^{-j3 \cdot \omega_S \cdot t} \cdot e^{-j\varphi_3} \}$$

$$u_{S03} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot u_{S3} (e^{j3 \cdot \omega_S \cdot t} \cdot e^{j\varphi_3} + e^{-j3 \cdot \omega_S \cdot t} \cdot e^{-j\varphi_3})$$

$$\boxed{u_{S03} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 2 \cdot \text{Re} \{ \underline{U}_{S3} \cdot e^{j3 \cdot \omega_S \cdot t} \}} \quad (8.12)$$

Für die anderen Oberschwingungen erfolgt die Betrachtung entsprechend.

Allgemein wird der komplexe Effektivwert einer Phase

$$\sqrt{2} \cdot u_{Sv} \cdot e^{jv \cdot \omega_S \cdot t} \cdot e^{-jv(i-1) \frac{2\pi}{3}} \cdot e^{j\varphi_2} \quad (8.13)$$

Der Faktor  $e^{-jv(i-1) \frac{2\pi}{3}} = a^{2 \cdot v \cdot (i-1)}$  tritt als Dreher auf und wird sowohl von der Phase als auch von der Ordnungszahl bestimmt. In der folgenden Tabelle sind für die ersten 8 Harmonischen der Faktor dargestellt. Nach dem Auftreten der Faktoren  $(1, a, a^2)$ ;  $(1, a^2, a)$  oder  $(0, 0, 0)$  handelt es sich um ein rechts- oder linksdrehendes System oder der Spannungsraumzeiger verschwindet.

$i =$	1	2	3	
$v =$	0	1	2	$i-1$
1	$a^0 = 1$	$a^2 = a^2$	$a^4 = a$	rechts
2	$a^0 = 1$	$a^4 = a$	$a^8 = a^2$	links
3	$a^0 = 1$	$a^6 = 1$	$a^{12} = 1$	0
4	$a^0 = 1$	$a^8 = a^2$	$a^{16} = a$	rechts
5	$a^0 = 1$	$a^{10} = a$	$a^{20} = a^2$	links
6	$a^0 = 1$	$a^{12} = 1$	$a^{24} = 1$	0
7	$a^0 = 1$	$a^{16} = a^2$	$a^{28} = a$	rechts
8	$a^0 = 1$	$a^{20} = a$	$a^{32} = a^2$	links
...	...	...	...	...

Faßt man diese Ergebnisse zusammen, so kann man daraus den Raumzeiger in der Darstellung als die Summe der Raumzeiger der OS für die ersten Harmonischen anschreiben.

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\{ \underline{U}_{S1} \cdot e^{j\omega_s t} + \underline{U}_{S4} \cdot e^{j4\omega_s t} + \underline{U}_{S7} \cdot e^{j7\omega_s t} + \underline{U}_{S10} \cdot e^{j10\omega_s t} + \dots \right. \\ \left. \dots + \underline{U}_{S2}^* \cdot e^{-j2\omega_s t} + \underline{U}_{S5}^* \cdot e^{-j5\omega_s t} + \underline{U}_{S8} \cdot e^{-j8\omega_s t} + \underline{U}_{S11} \cdot e^{-j11\omega_s t} + \dots \right\} e^{j\gamma_s} \quad (8.14)$$

Es treten positiv (1, 4, 7, 10, 13 ...) und negativ (2, 5, 8, 11 ...) drehende Raumzeigerkomponenten auf.

Der Raumzeiger enthält die nicht durch 3 teilbaren Ordnungen  $v$ . Es ist zu beachten, daß in  $\underline{U}_{Sv}$  wegen der Phase noch Vorzeichen versteckt sein können!

Wählt man  $\gamma_s = -\omega_s t$ , dann wird der Grundschwingungsanteil in  $\underline{u}_{S1}$  konstant und die Frequenzen der Oberschwingungsanteile werden durch 3 teilbare Vielfache von  $\omega_s$ .

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\{ \underline{U}_{S1} + \underline{U}_{S4} \cdot e^{j3\omega_s t} + \underline{U}_{S7} \cdot e^{j6\omega_s t} + \underline{U}_{S10} \cdot e^{j9\omega_s t} + \dots \right. \\ \left. + \underline{U}_{S2}^* \cdot e^{-j3\omega_s t} + \underline{U}_{S5}^* \cdot e^{-j6\omega_s t} + \underline{U}_{S8} \cdot e^{-j9\omega_s t} + \underline{U}_{S11} \cdot e^{-j12\omega_s t} + \dots \right\} \quad (8.15)$$

$$\underline{u}_{S0} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 2 \operatorname{Re} \left\{ \underline{U}_{S3} \cdot e^{j3\omega_s t} + \underline{U}_{S6} \cdot e^{j6\omega_s t} + \underline{U}_{S9} \cdot e^{j9\omega_s t} + \dots \right\} \quad (8.16)$$

Die Nullkomponente enthält nur die durch 3 teilbaren Ordnungen  $v$ . Bei Dreieckschaltung ist schaltungsbedingt  $u_{S0} = 0$ , d.h. durch 3 teilbare Ordnungen  $v$  können nicht auftreten. Bei Sternschaltung (mit freiem Sternpunkt) hat die Nullkomponente  $u_{S0}$  schaltungsbedingt keinen Nullstrom zur Folge.

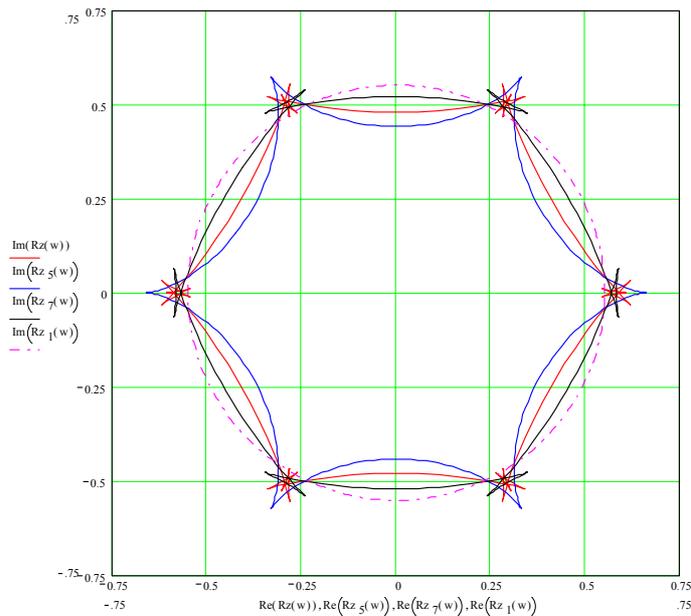


Bild 8.1: Beispiel zur Gewinnung der Zeitwerte aus dem Raumzeiger

## 8.2 Gewinnung der Zeitwerte aus einem Raumzeiger

Oft benötigt man wieder die Zeitwerte, nachdem die Rechnung z.B. mit Hilfe von Raumzeigern erfolgt ist. Falls  $u_{s0} = 0$  im symmetrischen System ist, gilt für die Rücktransformation von den Raumzeigergrößen auf die Zeitwerte die Transformationsvorschrift. Aus  $(u_s) = (C_s) \cdot (\underline{u}_s)$  wird mit eingesetzter Matrix  $(C_s)$  :

$$\begin{bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \\ u_{s3} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-j\gamma_s} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\gamma_s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_{s1} \\ \underline{u}_{s1}^* \\ u_{s0} \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

oder mit  $u_{s0} = 0$

$$\begin{bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \\ u_{s3} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & a \\ a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\gamma_s} \\ e^{j\gamma_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_{s1} \\ \underline{u}_{s1}^* \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{u}_{s1} \cdot e^{-j\gamma_s} + \underline{u}_{s1}^* \cdot e^{j\gamma_s} \\ a^2 \cdot \underline{u}_{s1} \cdot e^{-j\gamma_s} + a \cdot \underline{u}_{s1}^* \cdot e^{j\gamma_s} \\ a \cdot \underline{u}_{s1} \cdot e^{-j\gamma_s} + a^2 \cdot \underline{u}_{s1}^* \cdot e^{j\gamma_s} \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

$$\begin{bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \\ u_{s3} \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} \underline{u}_{s1} \cdot e^{-j\gamma_s} \\ a^2 \cdot \underline{u}_{s1} \cdot e^{-j\gamma_s} \\ a \cdot \underline{u}_{s1} \cdot e^{-j\gamma_s} \end{bmatrix} \right\} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} \underline{u}_{s1} (e^{j\gamma_s})^* \\ \underline{u}_{s1} (a \cdot e^{j\gamma_s})^* \\ \underline{u}_{s1} (a^2 \cdot e^{j\gamma_s})^* \end{bmatrix} \right\} \quad (8.19)$$

Die Realteilbildung bedeutet nichts anderes als die Projektion auf die Achsen

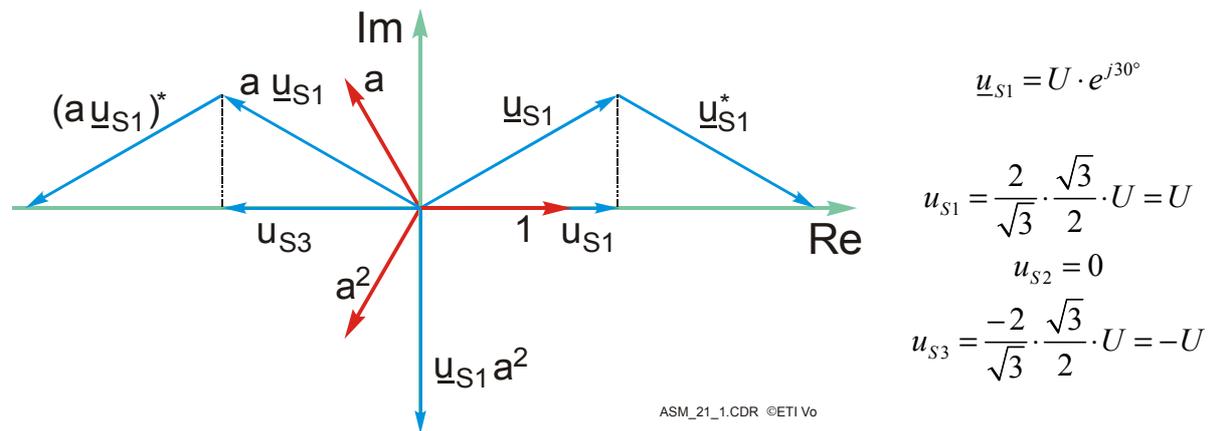


Bild 8.2: Beispiel zur Gewinnung der Zeitwerte aus dem Raumzeiger

### 8.2.1 Zeitwerte aus Raumzeiger mit Nullkomponente

Wenn die Nullkomponente vorhanden ist, muß diese bei der Gewinnung der Zeitwerte ebenfalls berücksichtigt werden. Entsprechend der vorausgegangenen Herleitung wird:

$$\begin{pmatrix} u_{S1} \\ u_{S2} \\ u_{S3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\gamma_s} & & \\ & e^{j\gamma_s} & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_{S1} \\ \underline{u}_{S1}^* \\ u_{S0} \end{pmatrix} \quad (8.20)$$

$$\begin{pmatrix} u_{S1} \\ u_{S2} \\ u_{S3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} e^{-j\gamma_s} & e^{j\gamma_s} & 1 \\ a^2 \cdot e^{-j\gamma_s} & a \cdot e^{j\gamma_s} & 1 \\ a \cdot e^{-j\gamma_s} & a^2 \cdot e^{j\gamma_s} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_{S1} \\ \underline{u}_{S1}^* \\ u_{S0} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \underline{u}_{S1} \cdot e^{-j\gamma_s} + \underline{u}_{S1}^* \cdot e^{j\gamma_s} + u_{S0} \\ a^2 \cdot e^{-j\gamma_s} \cdot \underline{u}_{S1} + a \cdot e^{j\gamma_s} \cdot \underline{u}_{S1}^* + u_{S0} \\ a \cdot e^{-j\gamma_s} \cdot \underline{u}_{S1} + a^2 \cdot e^{j\gamma_s} \cdot \underline{u}_{S1}^* + u_{S0} \end{pmatrix} \quad (8.21)$$

$$\begin{pmatrix} u_{S1} \\ u_{S2} \\ u_{S3} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Re} \left\{ \begin{pmatrix} \underline{u}_{S1} \cdot e^{-j\gamma_s} \\ a^2 \cdot \underline{u}_{S1} \cdot e^{-j\gamma_s} \\ a \cdot \underline{u}_{S1} \cdot e^{-j\gamma_s} \end{pmatrix} \right\} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot u_{S0} \quad (8.22)$$

### 8.3 Beispiel zum Raumzeiger

Symmetrisches Spannungssystem mit 1. und 5. Harmonischen:

$$u_{Si} = \sqrt{2} U_{S1} \cos \left[ \omega_s t - (i-1) \frac{2\pi}{3} \right] + \sqrt{2} U_{S5} \cos \left[ 5\omega_s t - 5(i-1) \frac{2\pi}{3} \right] \quad i = 1, 2, 3$$

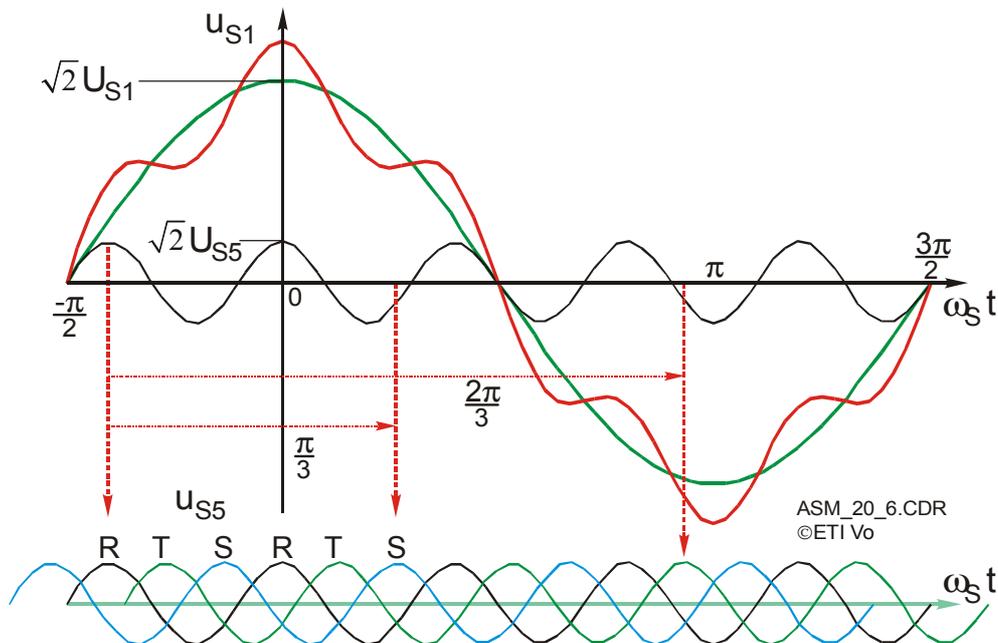


Bild 8.3: Beispiel zum symmetrischen Spannungssystem mit 1. und 5. Harmonischen.

Aus Bild 8.3 kann auch abgelesen werden, daß die 5. Harmonische ein linksdrehendes System bildet. Zeichnet man nämlich für jede der um jeweils  $120^\circ$  versetzten Phase die 5. Harmonische ein, folgt auf die Phase R nicht S sondern T.

$$\underline{U}_{S1} = U_{S1}$$

$$\underline{U}_{S5} = U_{S5}$$

$$\frac{U_{S5}}{U_{S1}} = 0,2 \quad (\text{willkürlich für dieses Beispiel gewählt})$$

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \{U_{S1} e^{j\omega_S t} + U_{S5} e^{-j5\omega_S t}\} \cdot e^{j\gamma_S} \quad (8.23)$$

$$\text{Z.B. ständerfest } \boxed{\gamma_S = 0}: \quad \underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot U_{S1} \left\{ e^{j\omega_S t} + \frac{U_{S5}}{U_{S1}} e^{-j5\omega_S t} \right\} \quad (8.24)$$

$$\text{Z.B. flussfest } \boxed{\gamma_S = -\omega_S t}: \quad \underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot U_{S1} \left\{ 1 + \frac{U_{S5}}{U_{S1}} e^{-j6\omega_S t} \right\} \quad (8.25)$$

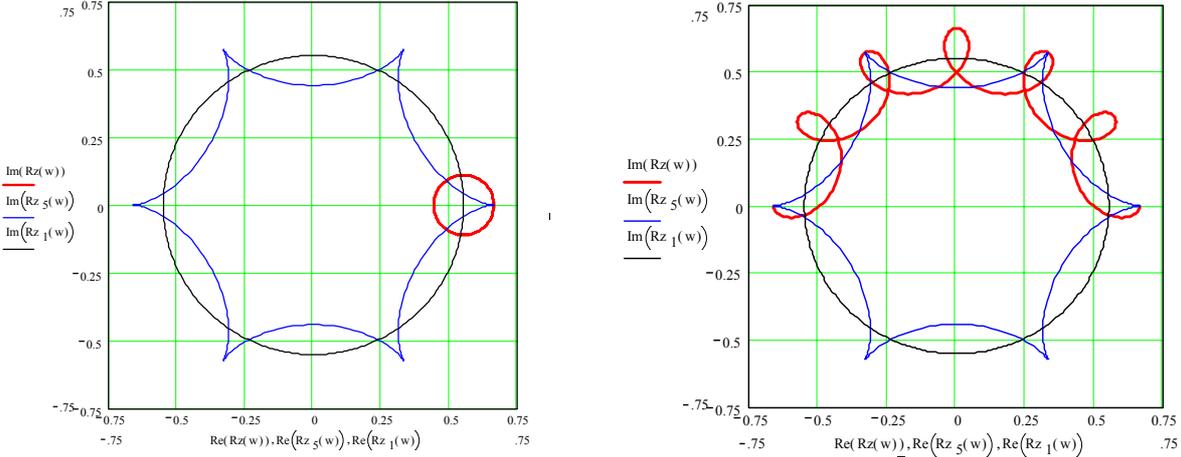
$$\text{Periode } \Delta\omega_S t = \frac{\pi}{3}$$

Frage: Welche Frequenzen sind enthalten

Vorteil bei der Rechnung wegen kürzerer Periodendauer.

Ortskurve des Raumzeigers  $\underline{u}_{S1}$  bezogen auf  $\sqrt{\frac{3}{2}} U_{S1}$ :

8.88 Speisung der Drehstromasynchronmaschine mit nichtsinusförmigem Spannungs- und Stromsystem



a)

b)

Bild 8.4: Raumzeiger im ständerfesten und im flußfesten Bezugssystem.



## 8 Blocktaktung

Drehstrommaschinen werden häufig von Spannungs- oder Stromzwischenkreisumrichtern gespeist. In diesem Abschnitt sollen die aus der Speisung resultierenden Raumzeiger genauer untersucht werden.

### 8.1 Block- oder Grundfrequenztaktung

Voraussetzung:

- Zweipunktumrichter, dh. Ausgangsspannung kann nur  $\pm \frac{U_d}{2}$  annehmen
- Begrenzte Schaltfrequenz des Umrichters
- Eingeprägte Zwischenkreisspannung  $U_d$  mit Mittelanzapfung
- Symmetrische Maschine

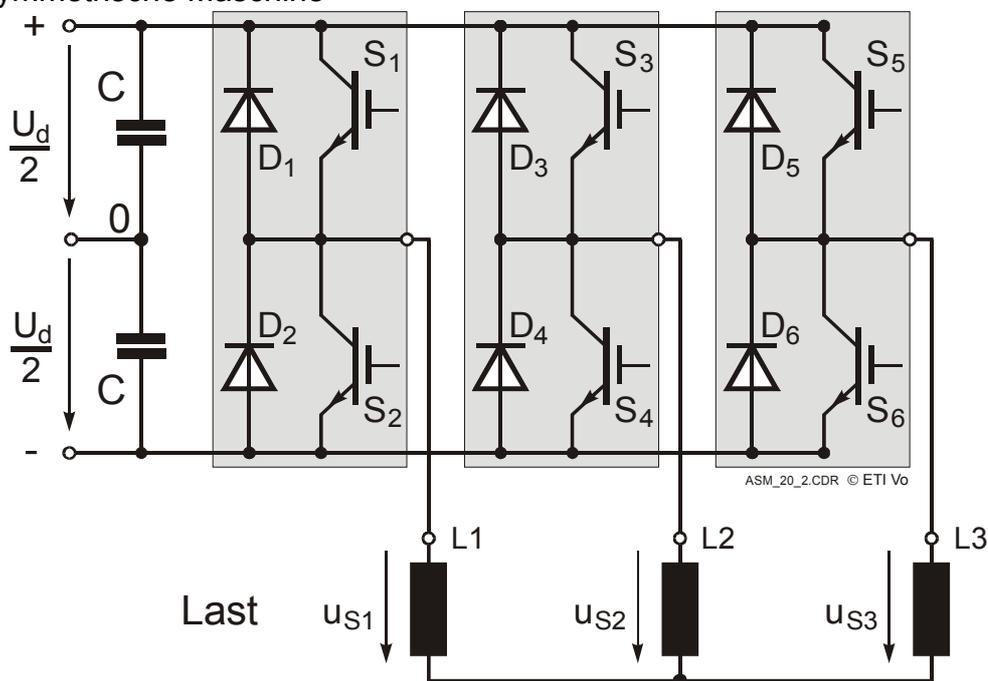
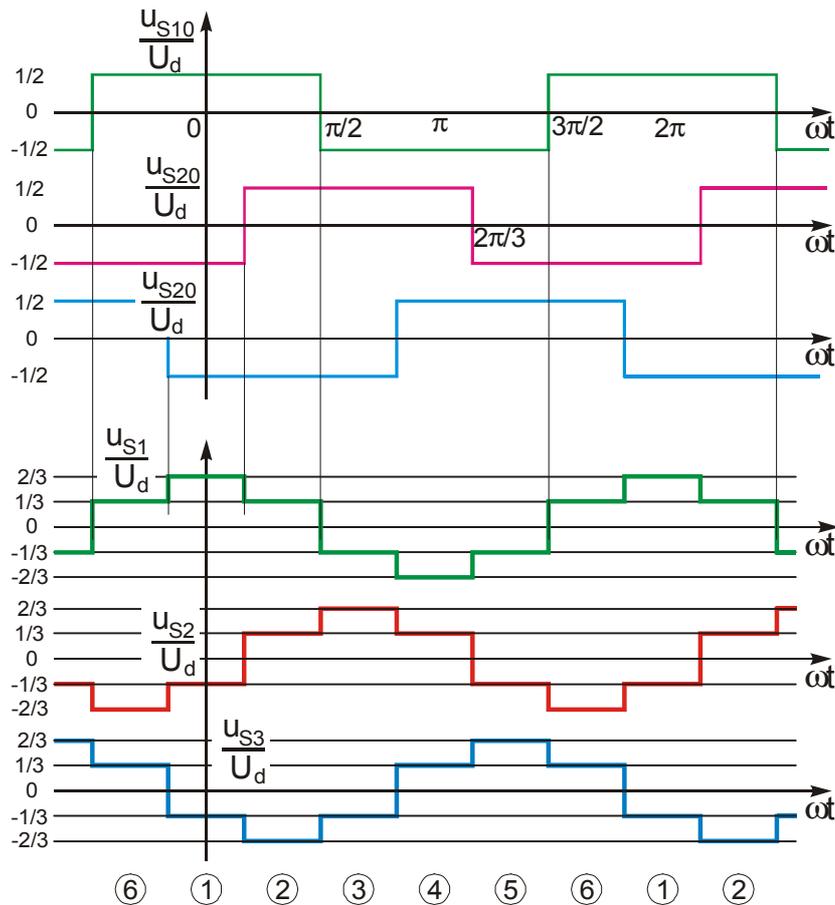


Bild 8.1: Typischer Zweipunkt-Spannungsumrichter mit Mittelanzapfung 0 der Zwischenkreisspannung.

Für die Strangspannungen  $u_{S1}$ ,  $u_{S2}$  und  $u_{S3}$  gilt:

$$\begin{bmatrix} u_{S1} \\ u_{S2} \\ u_{S3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{S10} \\ u_{S20} \\ u_{S30} \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

Die Ausgangsspannungen des Umrichters haben 2 Niveaus; die nach (8.1) berechneten Strangspannungen der Last haben 4 Niveaus. Die Nullkomponente der Statorspannung verschwindet zu jedem Zeitpunkt.



ASM\_20\_1.CDR ©ETI V6

Bild 8.2: Spannungsverläufe der Ausgangsspannungen und der Statorspannungen bei Blocktaktung.

Nach Bild 8.2 ergeben sich 6 verschiedene Zustände, die nacheinander in Gl.(8.4) eingesetzt werden. In der Tabelle sind noch zwei weitere Zustände 0 und 7 eingetragen, bei denen alle oberen oder alle unteren Schalter des Stromrichters eingeschaltet sind. Die Strangspannungen an der Maschine sind in diesen beiden Fällen Null.

Zustand Nr				Raumzeiger
	$\frac{u_{S10} \cdot 2}{U_d}$	$\frac{u_{S20} \cdot 2}{U_d}$	$\frac{u_{S30} \cdot 2}{U_d}$	$\frac{u_{S1} \cdot \sqrt{3}}{U_d}$
0	+1	+1	+1	0
1	+1	-1	-1	1
2	+1	+1	-1	$\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = -a^2$
3	-1	+1	-1	$-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = a$
4	-1	+1	+1	-1

5	-1	-1	+1	$-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = a^2$
6	+1	-1	+1	$\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = -a$
7	-1	-1	-1	0

Tabelle:

Die Bewegung des Spannungs-Raumzeigers erfolgt sprungförmig nachdem er jeweils 1/6 der Periodendauer an dem vorhergegangenen Punkt verweilt hat. Die Nullkomponente der Maschinenspannung ist Null. Bei dieser Steuerungsart kann die Amplitude der Spannung nicht verstellt werden.

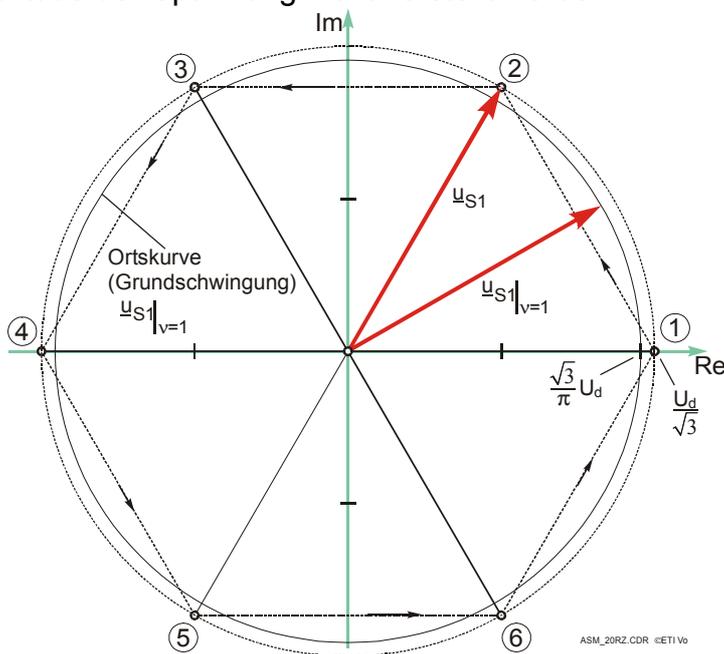


Bild 8.3: Spannungsraumzeiger bei Blocktaktung.

Um die Bewegungen des Spannungsraumzeigers genauer analysieren zu können, kann man folgende zwei Wege eingeschlagen:

1. Spannungen abschnittsweise in die Raumzeiger transformieren → Komponenten als Fourierreihe darstellen.
2. Spannungen  $u_{s10}$  nach Fourier in eine Reihe zerlegen → nach Def. Raumzeiger berechnen.

Hier wird der 2 Fall dargestellt. Für eine rechteckförmige Spannung gilt allgemein:

$$u_{s10} = \frac{U_d}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \sin\left((2n+1) \cdot \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad (8.2)$$

Allgemein für die drei Phasen der Umrichter Ausgangsspannung gegen den Mittelpunkt gerechnet:

$$u_{S10} = \frac{U_d}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \sin \left\{ (2n+1) \cdot \left( \omega t + \frac{\pi}{2} - (i-1) \frac{2\pi}{3} \right) \right\}$$

Abkürzung:  $k = 2n+1$   $k = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$

Zur Vereinfachung wird außerdem mit dem komplexen Zeitwert  $\underline{u}_{S10}$  gerechnet. Da

die Sinusfunktion gegeben ist, gilt:  $u_{S10} = \frac{\underline{u}_{S10} - \underline{u}_{S10}^*}{2j}$

Daraus wird für die drei Phasen

$$\underline{u}_{S10} = \frac{U_d}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot e^{jk \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)} \cdot a^{2k(i-1)} \quad i = \{1, 2, 3\} \quad \text{und} \quad k = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} \quad (8.3)$$

Für die Spannungen wird daher

$$\begin{aligned} u_{S1} &= \frac{2 \cdot U_d}{\pi \cdot 6 \cdot j} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[ (2 - a^{2k} - a^{4k}) \cdot e^{jk \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)} - (2 - a^k - a^{2k}) \cdot e^{-jk \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)} \right] \\ u_{S2} &= \frac{2 \cdot U_d}{\pi \cdot 6 \cdot j} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[ (-1 + 2a^{2k} - a^{4k}) \cdot e^{jk \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)} - (-1 + 2a^k - a^{2k}) \cdot e^{-jk \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)} \right] \\ u_{S3} &= \frac{2 \cdot U_d}{\pi \cdot 6 \cdot j} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[ (1 - a^{2k} + 2a^{4k}) \cdot e^{jk \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)} - (-1 - a^k + 2a^{2k}) \cdot e^{-jk \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)} \right] \end{aligned}$$

Aus den drei Spannungen  $u_{S1}$ ;  $u_{S2}$  und  $u_{S3}$  ist der Raumzeiger zu bilden.

$$\underline{u}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (u_{S1} + a \cdot u_{S2} + a^2 \cdot u_{S3}) \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} \underline{u}_{S1} &= \frac{2 \cdot U_d}{\pi \cdot 6 \cdot j \sqrt{3}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( (2 - a^{2k} - a^k - a + 2a^{2k+1} - a^{k+1} - a^2 - a^{2k+2} + 2a^{k+2}) \cdot e^{jk\omega t} \cdot e^{jk \frac{\pi}{2}} \right. \\ &\quad \left. - (2 - a^k - a^{2k} - a + 2a^{k+1} - a^{2k+1} - a^2 - a^{k+2} + 2a^{2k+2}) \cdot e^{-jk\omega t} \cdot e^{-jk \frac{\pi}{2}} \right) \end{aligned}$$

Zusammengefasst und  $1 + a + a^2 = 0$  berücksichtigt:

$$\underline{u}_{S1} = \frac{U_d}{\pi \cdot j \sqrt{3}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left( \frac{1 + a^{k+2} + a^{2k+1}}{k} \right) \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{jk \frac{\pi}{2}} - \left( \frac{1 + a^{k+1} + a^{2k+2}}{k} \right) \cdot e^{-j\omega t} \cdot e^{-jk \frac{\pi}{2}} \right\} \quad (8.5)$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch weiter vereinfachen. Der Ausdruck wird dazu für verschiedene  $k$  näher untersucht.

Für  $k = 1$  wird:

$$\text{Re: } 2 - a^2 - a - a + 2a^3 - a^2 - a^2 - a^4 + 2 = 6 - 3a^2 - 3a + 3 - 3 = 9$$

$$\text{Im: } 2 - a - a^2 - a + 2a^2 - a^3 - a^2 - a^3 + 2a^4 = 0$$

Für geradzahlige  $k$  verschwinden beide Ausdrücke, was bedeutet, daß keine geradzahligen Oberschwingungen auftreten.

Für  $k = 3$  wird:

$$\begin{aligned} \text{Re: } & 2 - a^6 - a^3 - a + 2a^7 - a^4 - a^2 - a^8 + 2a^5 \\ & 2 - 1 - 1 - a + 2a - a - a^2 - a^2 + 2a^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im: } & 2 - a^3 - a^6 - a + 2a^4 - a^7 - a^2 - a^5 + 2a^8 \\ & 2 - 1 - 1 - a + 2a - a - a^2 - a^2 + 2a^2 = 0 \end{aligned}$$

Die durch 3 teilbaren Oberschwingungen verschwinden ebenfalls alle.

Für  $k=5$  wird:

$$\begin{aligned} \text{Re: } & 2 - a^{10} - a^5 - a + 2a^{11} - a^6 - a^2 - a^{12} + 2a^7 \\ & 2 - a - a^2 - a + 2a^2 - 1 - 0^2 - 1 + 2a = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im: } & 2 - a^5 - a^{10} - a + 2a^6 - a^{11} - a^2 - a^7 + 2a^{12} \\ & 2 - a^2 - a - a + 2 - a^2 - a^2 - a + 2 = 6 - 3a^2 - 3a = 9 \end{aligned}$$

Für  $k=7$  wird:

$$\begin{aligned} \text{Re: } & 2 - a^{14} - a^7 - a + 2a^{15} - a^8 - a^2 - a^{16} + 2a^9 \\ & 2 - a^2 - a - a + 2 - a^2 - a^2 - a + 2 = 6 - 3a^2 - 3a = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im: } & 2 - a^7 - a^{14} - a + 2a^8 - a^{15} - a^2 - a^9 + 2a^{16} \\ & 2 - a - a^2 - a + 2a^2 - 1 - a^2 - 1 + 2a = 0 \end{aligned}$$

Für  $k=11$  wird:

$$\begin{aligned} \text{Re: } & 2 - a^{22} - a^{11} - a + 2a^{23} - a^{12} - a^2 - a^{24} + 2a^{13} \\ & 2 - a - a^2 - a + 2a^2 - 1 - a^2 - 1 + 2a = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im: } & 2 - a^2 - a - a + 2a^{12} - a^{23} - a^2 - a^{13} + 2a^{24} \\ & 2 - a^2 - a - a + 2 - a^2 - a^2 - a + 2 = 6 - 3a^2 - 3a = 9 \end{aligned}$$

Daraus ist das Bildungsgesetz schon erkennbar.

$$\underline{u}_{S1} = \frac{u_d \cdot 2 \cdot 9}{6 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}} \left\{ \frac{e^{j\omega t} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}}{j} - \frac{e^{-j5\omega t} \cdot e^{-j5\frac{\pi}{2}}}{j \cdot 5} + \frac{e^{+j7\omega t} \cdot e^{j7\frac{\pi}{2}}}{j \cdot 7} - \frac{e^{-j11\omega t} \cdot e^{-j11\frac{\pi}{2}}}{j \cdot 11} + \dots \right\}$$

mit  $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$ ;  $e^{-j5\frac{\pi}{2}} = -j$ ;  $e^{j7\frac{\pi}{2}} = -j$ ;  $e^{-j11\frac{\pi}{2}} = j$  wird

$$\underline{u}_{S1} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot U_d \cdot \left\{ \begin{aligned} & e^{j\omega_s t} - \frac{1}{7} \cdot e^{j\omega t \cdot 7} + \frac{1}{13} \cdot e^{j13\omega t} - \frac{1}{19} \cdot e^{j19\omega t} \dots \\ & + \frac{1}{5} e^{-j5\omega t} - \frac{1}{11} e^{-j11\omega t} + \frac{1}{17} e^{-j17\omega t} \dots \end{aligned} \right\} \cdot e^{j\gamma_s} \quad (8.6)$$

Aus dem Ergebnis erkennt man, daß die Grundschwingung des Raumzeigers die Amplitude  $\frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot U_d$  besitzt, wogegen die tatsächliche Amplitude bei der Blocktaktung

$$\frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot U_d \text{ beträgt.}$$

Aus der Fourierdarstellung des Spannungsraumzeigers erkennt man, daß sich der Grundschwingungsraumzeiger mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_s$  dreht



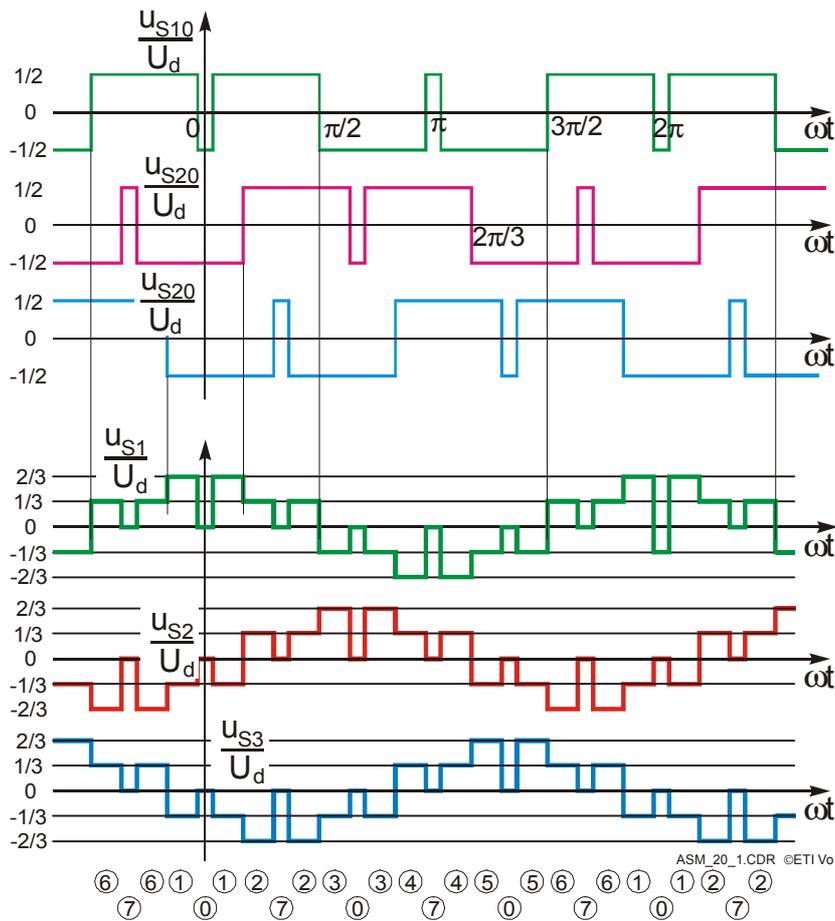
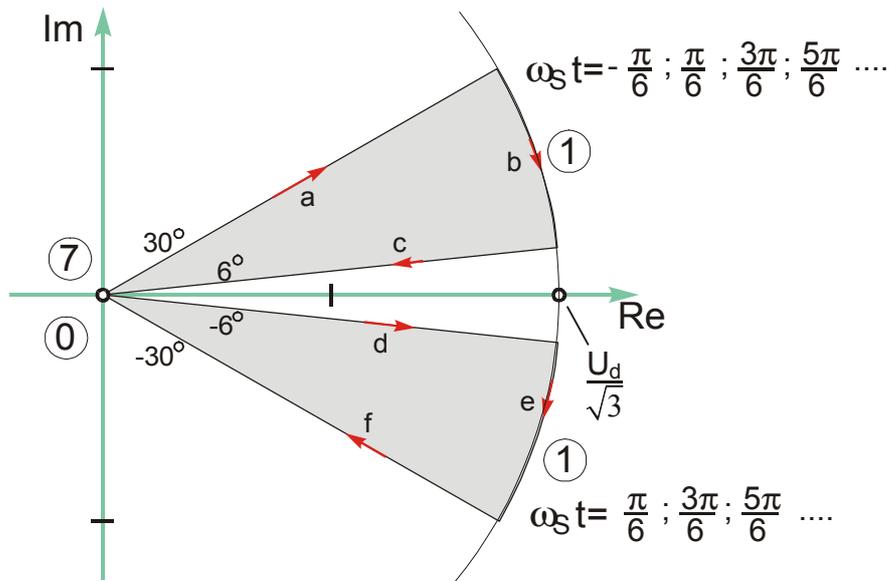


Bild 8.5: Spannungen bei einem Zweipunktwechselrichter mit Dreifachtaktung.

### 8.3 Mitrotierendes Bezugssystem

Nun soll noch der Spannungsraumzeiger in einem mit der Frequenz der Grundschwingung rotierenden Koordinatensystem betrachtet werden. Weil der Spannungsraumzeiger bei Blocktaktung um jeweils  $60^\circ$  springt erscheint der Spannungsraumzeiger in dem mitrotierenden System als kreisförmige Ortskurve. Bei der Dreifachtaktung geht die Ortskurve zudem noch durch den Ursprung des Koordinatensystems.

$$\gamma_s = -\omega_s t + \frac{\pi}{2}$$

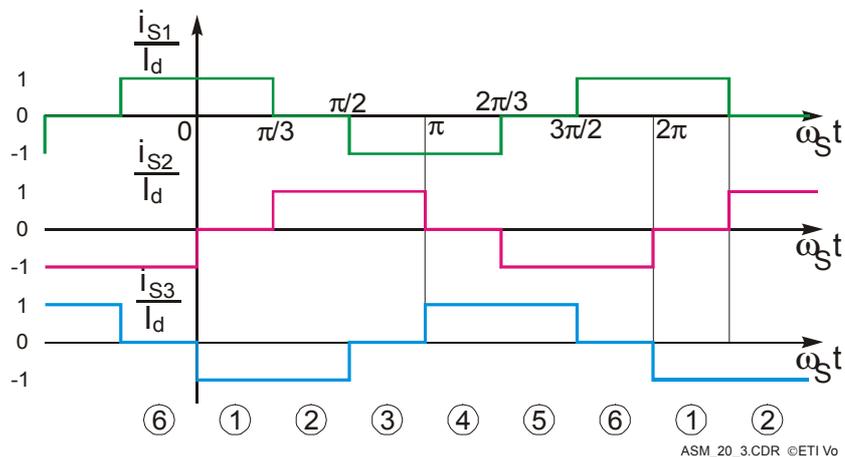


ASM\_20RZ.CDR ©ETI Vo

Bild 8.6: Ortskurve des Spannungsraumzeigers bei Blocktaktung im mitrotierenden Koordinatensystem.

#### 8.4 Stromraumzeiger bei Stromeinprägung

Bei stromeinprägenden Umrichtern wird der im Zwischenkreis meistens konstant gehaltene Strom mit Hilfe von 6 Schaltern auf die Maschine geschaltet. Dabei kann der Strom immer nur über 4 Ventile fließen, was bedeutet, daß ein Brückenweig stromlos ist (Bild 8.7).



ASM\_20\_3.CDR ©ETI Vo

Bild 8.7: Zeitverläufe bei Stromeinprägung.

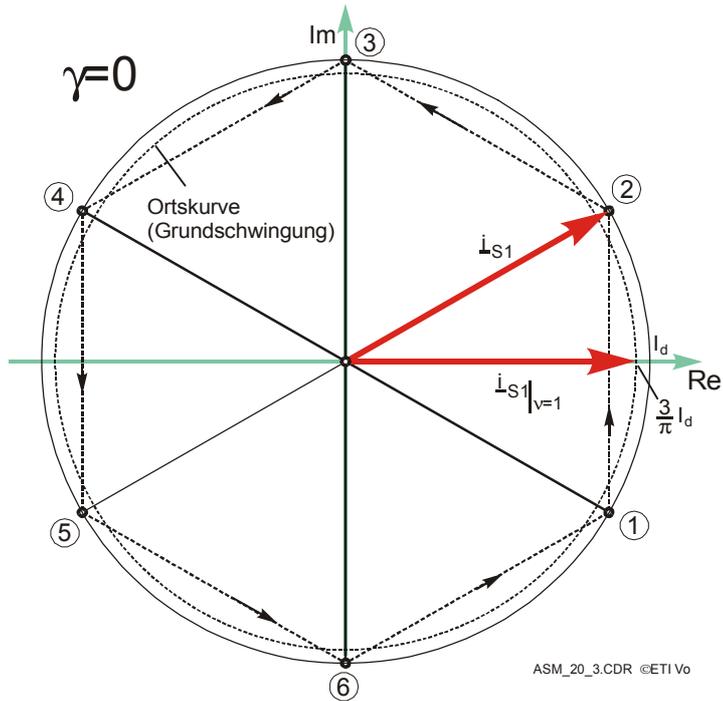


Bild 8.8: Stromraumzeiger bei a)  $\gamma_s = 0$  und b)  $\gamma_s = -\omega_s t + \frac{\pi}{2}$

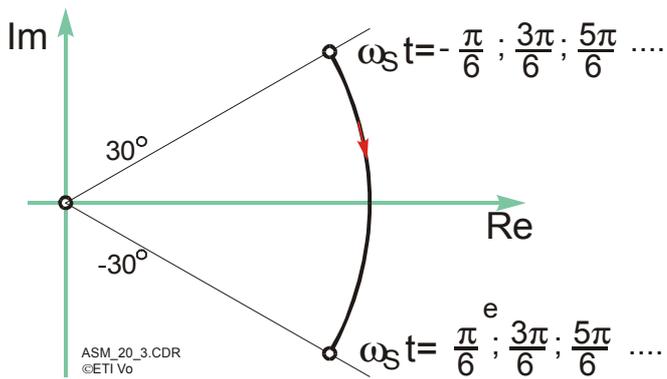


Bild 8.9: Stromraumzeiger bei a)  $\gamma_s = 0$  und b)  $\gamma_s = -\omega_s t + \frac{\pi}{2}$

## 8.5 Dreipunktwechselrichter

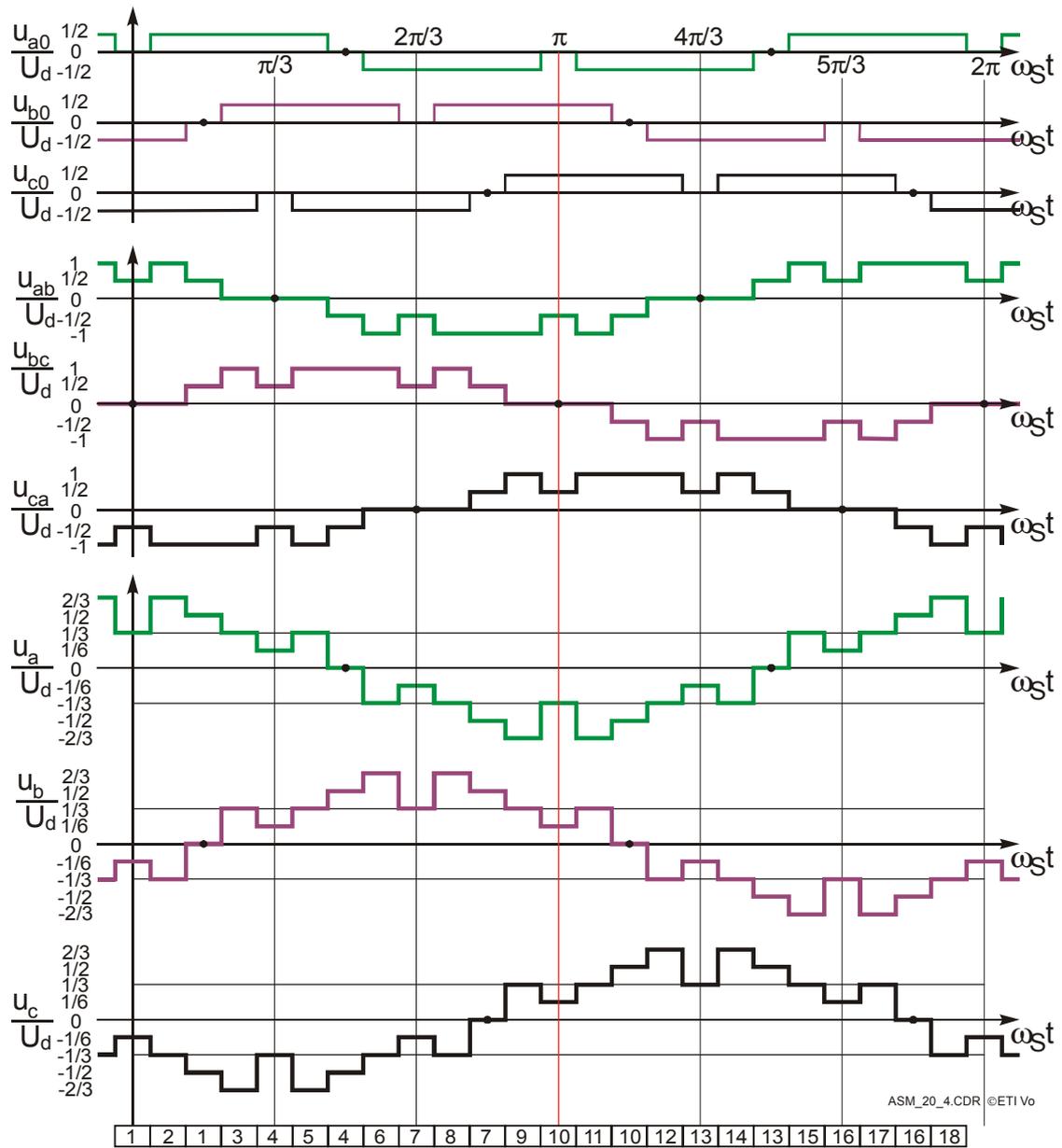


Bild 8.10: Spannungsraumzeiger bei einem Dreipunktwechselrichter

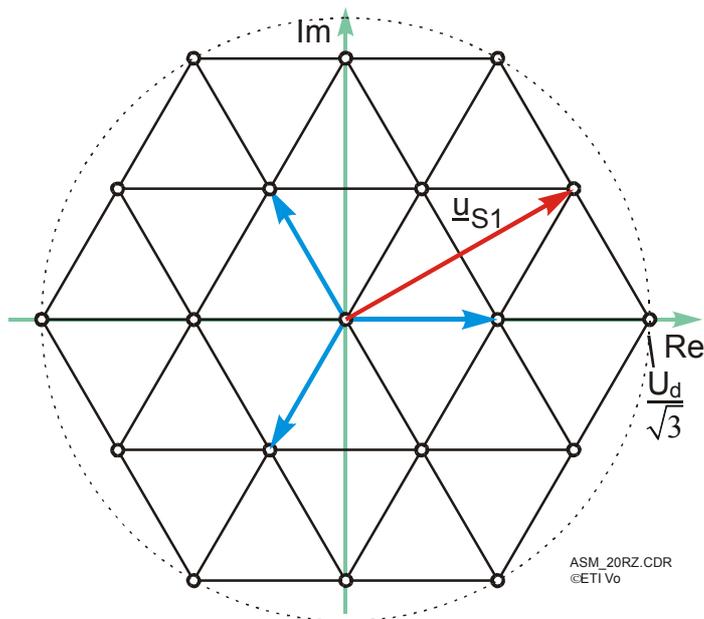


Bild 8.11: Spannungsraumzeiger bei einem Dreipunktwechselrichter

Einen bestimmten Raumzeiger kann man sich aus Teilzeiger zusammengesetzt denken. Ein Teilzeiger kann die Länge (1, 0 oder  $-1$ ). Es ergeben sich theoretisch insgesamt 27 Möglichkeiten von denen aber einige zusammenfallen und deshalb nur 19 Zustände möglich sind. Der Unterschied tritt in der Nullkomponente der Spannung zutage.

Beispielsweise kann der Punkt **3** durch zwei Kombinationen erreicht werden. Für den praktischen Fall versucht man daher mit Hilfe der Steuerung die Schaltfrequenz zu minimieren, indem man aus den zwei möglichen den auswählt, bei dem man mit nur einer Umschaltung im Stromrichter auf den gewünschten Zeiger gelangt.

$\underline{u}_{S1}$	$\frac{u_{a0} \cdot 2}{U_d}$	$\frac{u_{b0} \cdot 2}{U_d}$	$\frac{u_{c0} \cdot 2}{U_d}$		$\frac{u_a \cdot 6}{U_d}$	$\frac{u_b \cdot 6}{U_d}$	$\frac{u_c \cdot 6}{U_d}$
1	1	-1	-1		4	-2	-2
4	1	1	-1		2	2	-4
7	-1	1	-1		-2	4	-2
10	-1	1	1		-4	2	2
13	-1	-1	1		-2	-2	4
16	1	-1	1		2	-4	2
3	1	0	-1		3	0	-3
6	0	1	-1		0	3	-3
9	-1	1	0		-3	3	0
12	-1	0	1		-3	0	3
15	0	-1	1		0	-3	3
18	1	-1	0		3	-3	0
<b>2</b>	1	0	0		2	-1	-1
	0	-1	-1				
<b>5</b>	0	0	-1		1	1	-2
	1	1	0				
<b>8</b>	0	1	0		-1	2	-1
	-1	0	-1				
<b>11</b>	-1	0	0		-2	1	1
	0	1	1				
<b>14</b>	0	0	1		-1	-1	2
	-1	-1	0				
<b>17</b>	0	-1	0		1	-2	1
	1	0	1				
<b>19</b>	1	1	1		0	0	0
	-1	-1	-1				
	0	0	0				

### Raumzeigerwechsel mit nur einer Umschaltung

Bild 8.12 zeigt die möglichen Spannungsraumzeiger wenn beim Dreipunktwechselrichter die Aussteuerung von Vollaussteuerung bis auf Null reduziert wird. Zunächst hat man Blocktaktung wie beim Zweipunktwechselrichter. Mit kleiner werdender Aussteuerung werden Zustände hinzugenommen, die näher am Ursprung liegen. Bei sehr kleinen Aussteuerungen wird auch der Nullspannungszeiger mit eingeschaltet. Verglichen mit dem Zweipunktwechselrichter werden hier die Oberschwingungen geringer.

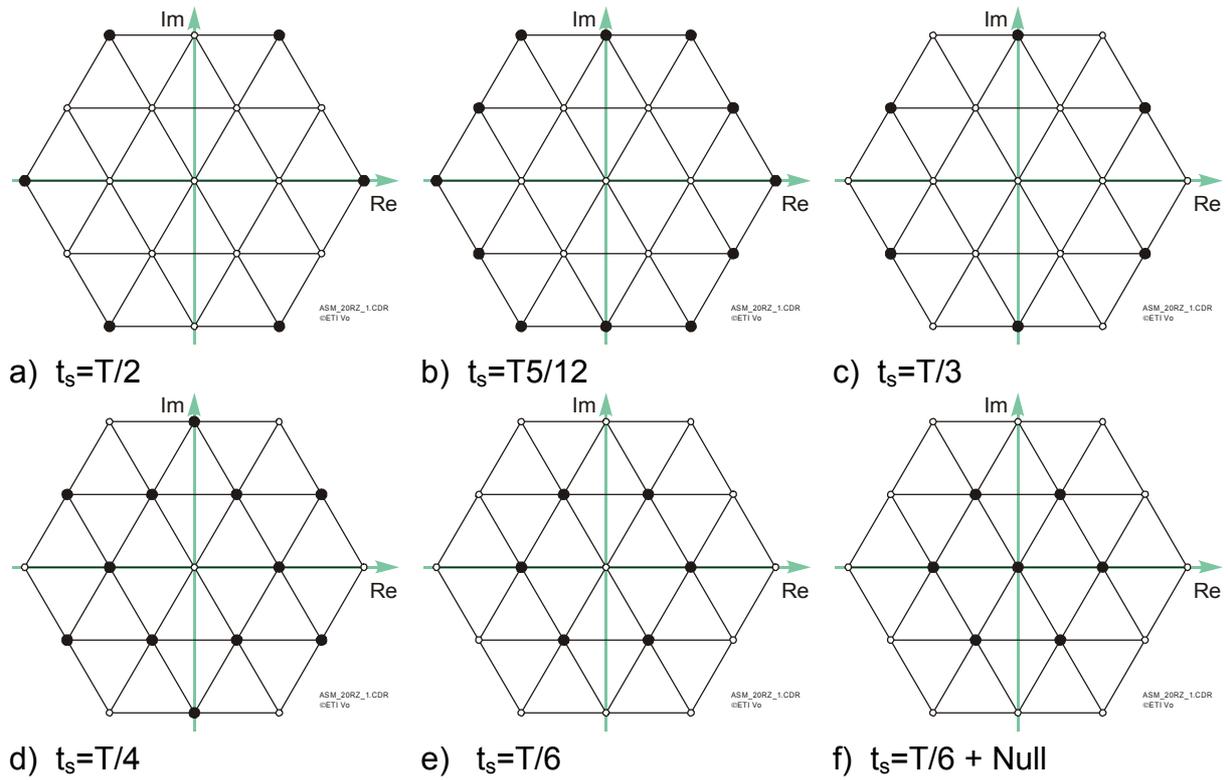


Bild 8.12: Spannungsraumzeiger eines Dreipunktwechselrichters bei verschiedenen Aussteuergraden. ( $t_s$ =Einschaltzeit eines Brückenzeuges)



## 9 Berechnung von Strangspannungen und Raumzeigern

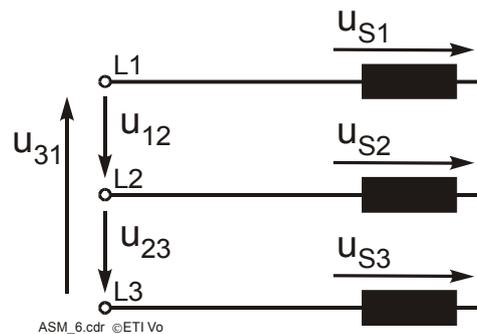
Oft müssen aus verketteten Spannungen zwischen zwei Leitern oder Spannungen, die gegen einen Mittelpunkt definiert sind die Raumzeiger ermittelt werden. Außerdem kann die Last in Stern- oder in Dreieckschaltung ausgeführt sei. Hier werden die vier Möglichkeiten dargestellt und Gleichungen angegeben, mit denen man direkt aus den gegebenen Spannungen den Raumzeiger ermitteln kann. Zunächst werden aus den gegebenen Spannungen die Strangspannungen ermittelt um diese dann in die Definitionsgleichung für den RZ einzusetzen.

Gegeben:	Verkettete Spannungen	Spannungen Gegen Neutralleiter
Sternschaltung		
Dreieckschaltung		

### 9.1 Leiterspannungen sind bekannt

#### 9.1.1 Sternschaltung

Aus der Bedingung, daß die Summe aller Ströme bei der Sternschaltung ohne angeschlossenen Sternpunkt Null ist, folgt aus der Nullkomponente des Gleichungssystems, daß bei symmetrischer Last auch die Summe der drei Spannungen Null sein muß.



ASM\_6.cdr ©ETI Vo

Mit dieser Bedingung und jeweils zwei Maschengleichungen erhält man

Nullkomponente	$u_{S1} = -u_{S2} - u_{S3}$	$u_{S2} = -u_{S1} - u_{S3}$	$u_{S3} = -u_{S1} - u_{S2}$
Masche 1	$u_{S1} = u_{12} + u_{S2}$	$u_{S2} = u_{23} + u_{S3}$	$u_{S3} = -u_{23} + u_{S2}$
Masche 2	$u_{S1} = u_{13} + u_{S3}$	$u_{S2} = -u_{12} + u_{S1}$	$u_{S3} = -u_{31} + u_{S1}$
	$3 \cdot u_{S1} = u_{12} + u_{13}$	$3 \cdot u_{S2} = u_{23} + u_{21}$	$3 \cdot u_{S3} = u_{31} + u_{32}$

In Matrixschreibweise ist dies mit  $u_{12} = -u_{21}$

$$\begin{pmatrix} u_{S1} \\ u_{S2} \\ u_{S3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} u_{12} + u_{13} \\ u_{23} + u_{21} \\ u_{31} + u_{32} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} u_{12} - u_{31} \\ u_{23} - u_{12} \\ u_{31} - u_{23} \end{pmatrix} \quad \text{oder schließlich in Matrizenform}$$

$$\begin{pmatrix} u_{S1} \\ u_{S2} \\ u_{S3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{23} \\ u_{31} \end{pmatrix}$$

(9.1)

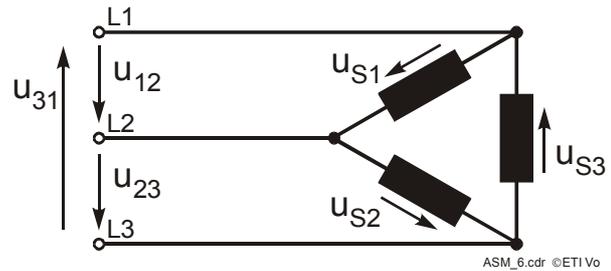
#### 9.1.1.1 Ermittlung des Raumzeigers

Setzt man in die Definition des Raumzeigers



### 9.1.2 Dreieckschaltung

Die Strangspannungen sind bei der Last in Dreieckschaltung direkt aus den Differenzen der verketteten Spannungen zu ermitteln.



$$\begin{pmatrix} u_{S1} \\ u_{S2} \\ u_{S3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{23} \\ u_{31} \end{pmatrix} \tag{9.4}$$

Der Raumzeiger ist deshalb direkt mit der Definitionsgleichung zu ermitteln:

$$\underline{u}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \{u_{12} + a \cdot u_{23} + a^2 \cdot u_{31}\} \tag{9.5}$$

## 9.2 Klemmenspannungen gegen einen Mittelleiter sind bekannt

Gegeben ist z.B. ein Umrichter, der drei auf ein Nullpotential des Umrichter bezogene Ausgangsspannungen liefert. Das Nullpotential kann beispielsweise durch eine Mittelanzapfung im Zwischenkreis entstanden sein. Welche Strangspannungen ergeben sich bei einer symmetrischen Last?

Die auf das Nullpotential bezogenen Spannungen sind:  $\begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \end{pmatrix}$

### 9.2.1 Sternschaltung

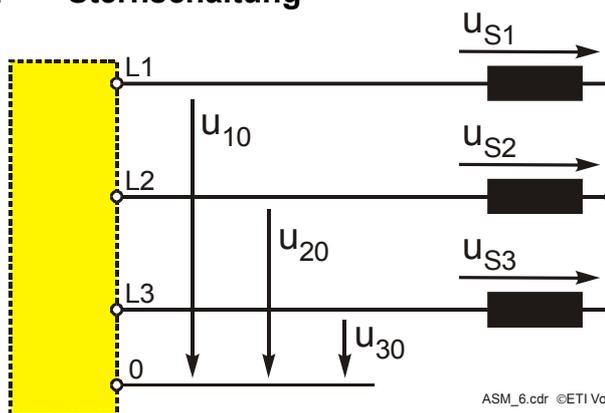


Bild 9.2: Sternschaltung der Last

Entsprechend der Herleitung oben gilt auch hier, daß die Summe aller Ströme bei der Sternschaltung ohne angeschlossenen Sternpunkt Null ist folgt aus der Nullkomponente des Gleichungssystems, daß bei symmetrischer Last auch die Summe der drei Spannungen Null sein muß. Mit dieser Bedingung und jeweils zwei Maschengleichungen, die hier über den Neutralleiter führen, erhält man

$u_{S1} = -u_{S2} - u_{S3}$	$u_{S2} = -u_{S1} - u_{S3}$	$u_{S3} = -u_{S1} - u_{S2}$
$u_{S1} = u_{10} - u_{20} + u_{S2}$	$u_{S2} = u_{20} - u_{10} + u_{S1}$	$u_{S3} = u_{30} - u_{20} + u_{S2}$
$u_{S1} = u_{10} - u_{30} + u_{S3}$	$u_{S2} = u_{20} - u_{30} + u_{S3}$	$u_{S3} = u_{30} - u_{10} + u_{S1}$
$3 \cdot u_{S1} = 2 \cdot u_{10} - u_{20} - u_{30}$	$3 \cdot u_{S2} = 2 \cdot u_{20} - u_{10} - u_{30}$	$3 \cdot u_{S3} = 2 \cdot u_{30} - u_{10} - u_{20}$

In Matrixschreibweise ist dies dann direkt

$$\begin{pmatrix} u_{S1} \\ u_{S2} \\ u_{S3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

### 9.2.1.1 Ermittlung des Raumzeigers

Setzt man die obige Gl. in die Definition  $\underline{u}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1 \ a \ a^2) \cdot \begin{pmatrix} u_{S1} \\ u_{S2} \\ u_{S3} \end{pmatrix}$  ein, wird

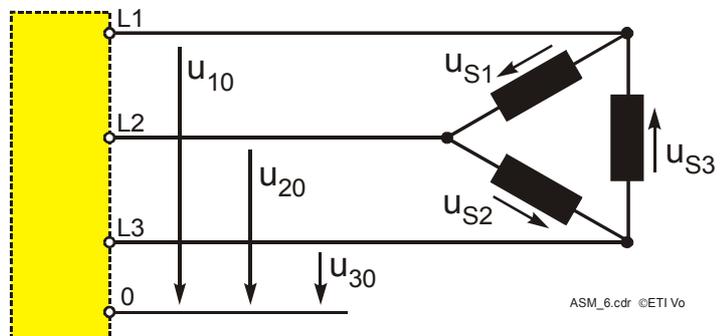
$$\begin{aligned} \underline{u}_{S1} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1 \ a \ a^2) \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 2-a-a^2 \\ -1+2a-a^2 \\ -1-a+2a^2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot 3 \cdot (1 \ a \ a^2) \cdot \begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

oder daraus

$$\underline{u}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \{u_{10} + a \cdot u_{20} + a^2 \cdot u_{30}\} \quad (9.7)$$

### 9.2.2 Dreieckschaltung

Bei Dreieckschaltung sind die Strangspannungen als Differenz der auf den Mittelpunkt bezogenen Spannungen leicht zu ermitteln. Die Gleichungen kann man direkt anschreiben:



$$\begin{pmatrix} u_{S1} \\ u_{S2} \\ u_{S3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

### 9.2.2.1 Ermittlung des Raumzeigers

Der Raumzeiger wird

$$\underline{u}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1-a^2 \\ a-1 \\ a^2-a \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \end{pmatrix}$$

oder mit  $1-a^2 = -j \cdot \sqrt{3} \cdot a$  ;  $a-1 = -j \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$  und  $a^2-a = -j \cdot \sqrt{3}$  ,

$$\boxed{\underline{u}_{S1} = -j \cdot \{a \cdot u_{10} + a^2 \cdot u_{20} + u_{30}\}} \quad (9.9)$$



## 9 Nichtsinusförmiger symmetrischer Betrieb

### 9.1 Stationärer Betrieb bei nichtsinusförmiger symmetrischer Speisung

Stationärer Betrieb bedeutet keine Änderung der Drehzahl; d.h. ist  $\ddot{\gamma} = 0$ .

Der Spannungsraumzeiger besteht aus einer Fourierreihe. Es soll gelten

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot U_{Sv} \cdot e^{jk\varphi_v} \cdot e^{(kv \cdot \omega_s t + \gamma_s)} \quad (9.1)$$

$$k = \begin{cases} 1 & \text{für } v = 1, 4, 7, 10, \dots \quad \text{rechtsdrehend} \\ -1 & \text{für } v = 2, 5, 8, 11, \dots \quad \text{linksdrehend} \end{cases} \quad (9.2)$$

Die geradzahigen Oberschwingungen verschwinden alle wegen der Symmetrie.

Als Bezugssystem wird  $\gamma_s = 0$  gewählt, was bedeutet, daß die Bezugsachse mit dem ersten Statorstrang verbunden ist. Damit erhält man

$$\gamma_R = \gamma_s + \gamma \quad \text{bzw.} \quad \gamma_R = \gamma = \dot{\gamma} \cdot t + \gamma_0 = (1-s) \cdot \omega_s \cdot t + \gamma_0 \quad (9.3)$$

Die stationären Lösungsansätze für die Ströme liefern

$$\underline{i}_{S1v} = \sqrt{\frac{3}{2}} I_{Sv} e^{jk\varphi_{Sv}} e^{jkv\omega_s t} \quad \underline{I}_{Sv} = I_{Sv} e^{j\varphi_{Sv}} \quad (9.4)$$

$$\underline{i}'_{R1v} = \sqrt{\frac{3}{2}} I'_{Rv} e^{jk\varphi_{Rv}} e^{jkv\omega_s t} \quad \underline{I}'_{Rv} = I'_{Rv} e^{j\varphi_{Rv}} \quad (9.5)$$

Um die Harmonischen im Rotorstrom herauszufinden transformiert man ins rotorfeste Bezugssystem, indem man mit dem Faktor  $e^{-j\gamma_R}$  multipliziert.

$$\underline{i}'_{R1v} \cdot e^{-j\gamma_R} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot I'_{Rv} \cdot e^{jk \cdot \varphi_{Rv}} \cdot e^{j(kv \cdot \omega_s \cdot t - (1-s) \cdot \omega_s \cdot t - \gamma_0)} \quad (9.6)$$

Die Frequenzen der Harmonischen im Rotorstrom sind damit

$k$	1	-1	1	-1	....
$v$	1	5	7	11	....
$(kv - 1 + s)\omega_s$	$s\omega_s$	$(-6 + s)\omega_s$	$(6 + s)\omega_s$	$(-12 + s)\omega_s$	....

Das innere Drehmoment ist:

$$\boxed{M_i = 2p \cdot L_{Sh} \cdot \text{Im} \{ \underline{i}_{S1} \cdot \underline{i}'_{R1}^* \}} \quad (9.7)$$

$$M_i = \frac{3}{2} \cdot 2p \cdot L_{Sh} \cdot \text{Im} \left\{ \sum_{v=1}^{\infty} I_{Sv} \cdot e^{jk_v \cdot \varphi_{Sv}} \cdot e^{jk_v \cdot v \cdot \omega_s \cdot t} \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} I_{R\mu} \cdot e^{-jk_{\mu} \cdot \varphi_{R\mu}} \cdot e^{-jk_{\mu} \cdot \mu \cdot \omega_s \cdot t} \right\} \quad (9.8)$$

$\varphi_{Sv}$  und  $\varphi_{R\mu}$  sind konstant.

Allgemein ist:

$$\boxed{v = \mu} \rightarrow \text{asynchrone Momente} \sim \text{Im} \left\{ I_{Sv} \cdot e^{jk_v \varphi_{Sv}} \cdot I'_{R\mu} \cdot e^{-jk_\mu \varphi_{R\mu}} \right\}$$

$$\boxed{v \neq \mu} \rightarrow \text{Pendelmomente} \sim \text{Im} \left\{ I_{Sv} \cdot e^{jk_v \varphi_{Sv}} \cdot I'_{R\mu} \cdot e^{-jk_\mu \varphi_{R\mu}} \cdot e^{j(k_v v - k_\mu \mu) \omega_S t} \right\}$$

Wegen der Dreiphasigkeit treten nur Oberschwingungen der Ordnungszahl 1, 5, 7, 11, 13... auf, wobei die 5, 11 usw. linksdrehend und die 7, 13 usw. rechtsdrehend sind. Die asynchronen Momente liefern im Mittel einen Beitrag zum Gesamtmoment. Die Pendelmomente bestehen aus einem reinen Wechselanteil und liefern im zeitlichen Mittel keinen Beitrag zum Gesamtmoment. Sie verursachen in der Hauptsache Geräusche und Verluste. Daher können folgende Kombinationen auftreten:

$k_v v$	$k_\mu \mu$	$(k_v \cdot v - k_\mu \cdot \mu) \cdot \omega_S$
+1	-5	$(1+5) \cdot \omega_S = 6 \cdot \omega_S$
+1	+7	$(1-7) \cdot \omega_S = -6 \cdot \omega_S$
-5	+1	$(-5-1) \cdot \omega_S = 6 \cdot \omega_S$
+7	+1	$(7-1) \cdot \omega_S = 6 \cdot \omega_S$
-5	+7	$(-5-7) \cdot \omega_S = -12 \cdot \omega_S$
+7	-5	$(7+5) \cdot \omega_S = 12 \cdot \omega_S$
...	...	...

D.h. es treten nur die 6, 12 ....fachen Oberschwingungen im Drehmoment auf (außer der Grundschiwingung).

## 9.2 Anwendung des Superpositionsprinzips auf das lineare System

Die ASM wird nach Gl.(9.1) mit verschiedenen Frequenzen bzw. Spannungsraumzeigern gespeist. Das Bezugssystem soll statorfest sein.

$$\gamma_S = 0 \quad ; \quad \ddot{\gamma} = 0 \quad \text{und es ist} \quad \gamma_R = \gamma \quad ; \quad \dot{\gamma}_R = \dot{\gamma}$$

### 9.2.1 Herleitung

Für die Spannung gilt:

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot u_{Sv} \cdot e^{jk \cdot \varphi_v} \cdot e^{j(kv \cdot \omega_S t + \gamma_S)} \quad (9.9)$$

Wenn das System linksdrehend ist ist  $k = -1$  und man erhält anstatt dem Raumzeiger  $\underline{u}_{S1}$  den konjugiert komplexen  $\underline{u}_{S1}^*$ . Daher muß die Frage beantwortet werden, wie das linksdrehende System zu behandeln ist beantwortet werden.

Deshalb muss für  $k = -1$  auch die konjugiert komplexe Gleichung benutzt werden. Wegen  $\gamma_S = 0$  spielt der  $\alpha$  keine Rolle.

Man erhält für  $k = 1$

$$\underline{U}_{Sv} = R_S \cdot \underline{I}_{Sv} + (L_{Sh} + L_{S\sigma}) \cdot jv \cdot \omega_S \cdot \underline{I}_{Sv} + L_{Sh} \cdot jv \cdot \omega_S \cdot \underline{I}'_{Rv} \quad (9.10)$$

$$0 = R'_R \cdot \underline{I}'_{Rv} - \underbrace{j\dot{\gamma} [L_{Sh} \underline{I}'_{Sv} + (L_{Sh} + L'_{Rv}) \underline{I}'_{Rv}]}_{(F_R)} + \underbrace{jv \cdot \omega_S [L_{Sh} \underline{I}'_{Sv} + (L_{Sh} + L'_{Rv}) \underline{I}'_{Rv}]}_{\frac{d\psi}{dt}} \quad (9.11)$$

Und für  $k = -1$  die konjugiert komplexe Gleichung

$$\left(\underline{U}'_{Sv}\right)^* = \underline{U}'_{Sv} = R'_S \cdot \underline{I}'_{Sv} + (L_{Sh} + L_{S\sigma}) \cdot jv \cdot \omega_S \cdot \underline{I}'_{Sv} + L_{Sh} \cdot jv \cdot \omega_S \cdot \underline{I}'_{Rv} \quad (9.12)$$

$$0 = R'_R \cdot \underline{I}'_{R1} + \underbrace{j\dot{\gamma} [L_{Sh} \underline{I}'_{Sv} + (L_{Sh} + L'_{R\sigma}) \underline{I}'_{Rv}]}_{(F_R)} + \underbrace{jv \cdot \omega_S [L_{Sh} \underline{I}'_{Sv} + (L_{Sh} + L'_{Rv}) \underline{I}'_{Rv}]}_{\frac{d\psi}{dt}} \quad (9.13)$$

Die beiden Systeme unterscheiden sich nur an einer Stelle, d.h. man kann die beiden Gleichungen wieder für  $k = \pm 1$  zu einem System zusammenfassen, wenn bei der Rotorgleichung für  $k=1$  anstatt  $j\dot{\gamma}$  dann einfach  $j \cdot k \cdot \dot{\gamma}$  eingeführt wird.

## 9.2.2 Anwendung auf die ASM

Nun läßt sich diese Gleichung auf die ASM anwenden.

$$\underline{U}'_{Sv} = R'_S \cdot \underline{I}'_{Sv} + (L_{Sh} + L_{S\sigma}) jv \cdot \omega_S \cdot \underline{I}'_{Sv} + L_{Sh} \cdot jv \cdot \omega_S \cdot \underline{I}'_{Rv} \quad (9.14)$$

$$0 = R'_R \cdot \underline{I}'_{Rv} - jk \cdot \dot{\gamma} [L_{Sh} \cdot \underline{I}'_{Sv} + (L_{Sh} + L'_{R\sigma}) \underline{I}'_{Rv} + jv \omega_S \cdot L_{Sh} \underline{I}'_{Sv} + (L_{Sh} + L'_{R\sigma}) \underline{I}'_{Rv}] \cdot \underline{I}'_{Rv} \quad (9.15)$$

Zusammengefasst wird daraus

$$\underline{U}'_{Sv} = R'_S \cdot \underline{I}'_{Sv} + jv \cdot \omega_S [(L_{Sh} + L_{S\sigma})] \cdot \underline{I}'_{Sv} + L_{Sh} \cdot \underline{I}'_{Rv} \quad (9.16)$$

$$0 = R'_R \cdot \underline{I}'_{Rv} + j \left( v \cdot \omega_S - k \cdot \dot{\gamma} \right) \cdot [(L_{Sh} \cdot \underline{I}'_{Sv}) + (L_{Sh} + L'_{R\sigma}) \cdot \underline{I}'_{Rv}] \quad (9.17)$$

Nun wird noch die Rotorgleichung durch  $s_v = \frac{v \cdot \omega_S - k \cdot \dot{\gamma}}{v \cdot \omega_S}$  dividiert, damit vor den Induktivitäten  $v \cdot \omega_S$  als Frequenz stehen soll.

$$0 = \frac{R'_R \cdot \underline{I}'_{Rv}}{s_v} + j \frac{\left( v \cdot \omega_S - k \cdot \dot{\gamma} \right) \cdot v \cdot \omega_S}{\left( v \cdot \omega_S - k \cdot \dot{\gamma} \right)} \cdot [L_{Sh} \cdot \underline{I}'_{Sv} + (L_{Sh} + L'_{R\sigma}) \cdot \underline{I}'_{Rv}] \quad (9.18)$$

$$0 = \frac{R'_R}{s_v} \cdot \underline{I}'_{Rv} + jv \cdot \omega_S \cdot [L_{Sh} \cdot \underline{I}'_{Sv} + (L_{Sh} + L'_{R\sigma}) \cdot \underline{I}'_{Rv}] \quad (9.19)$$

Der so definierte Schlupf ist ( $k = \pm 1$  bzw.  $\frac{1}{k} = k$ )

$$s_v = \frac{k v \cdot \omega_S - \dot{\gamma}}{k \cdot v \cdot \omega_S} = 1 - \frac{\dot{\gamma}}{k \cdot v \cdot \omega_S} \quad \text{wegen} \quad \dot{\gamma} = (1-s) \cdot \omega_S \quad \text{wird auch}$$

$$\boxed{s_v = 1 - \frac{(1-s) \cdot \omega_S}{k \cdot v \cdot \omega_S} = 1 - \frac{1-s}{k \cdot v} = \frac{k \cdot v - 1 + s}{k \cdot v}} \quad (9.20)$$

Wobei  $s$  = Schlupf der 1. Harmonischen und  $s_v$  = Schlupf für OS sind.

Die Umformung nach  $s$  ergibt:

$$s_v \cdot k \cdot v = k \cdot v - 1 + s \quad \text{oder}$$

$$s = (s_v - 1) \cdot k \cdot v + 1 \quad (9.21)$$

Das Gleichungssystem ist damit

$$\underline{U}_{Sv} = R_S \cdot \underline{I}_{Sv} + jv \cdot \omega_S \left[ (L_{Sh} + L_{S\sigma}) \right] \cdot \underline{I}_{Sv} + L_{Sh} \cdot \underline{I}'_{Rv} \quad (9.22)$$

$$0 = \frac{R'_R}{s_v} \cdot \underline{I}'_{Rv} + jv \cdot \omega_S \cdot \left[ L_{Sh} \cdot \underline{I}_{Sv} + (L_{Sh} + L'_{R\sigma}) \cdot \underline{I}'_{Rv} \right] \quad (9.23)$$

Aus den beiden Gleichungen folgt das Ersatzschaltbild für die Oberschwingungen:

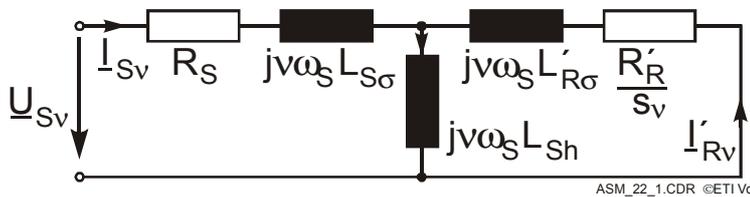


Bild 9.1: Ersatzschaltbild für die Oberschwingungen

Der Faktor  $\frac{1}{s_v} = \frac{v \cdot k}{kv - 1 + s}$  beim Rotorwiderstand beeinflusst entscheidend den Rotor-

strom weshalb dieser Faktor in Bild 9.2 für die Ordnungszahlen {1, 5 und 7} dargestellt ist.

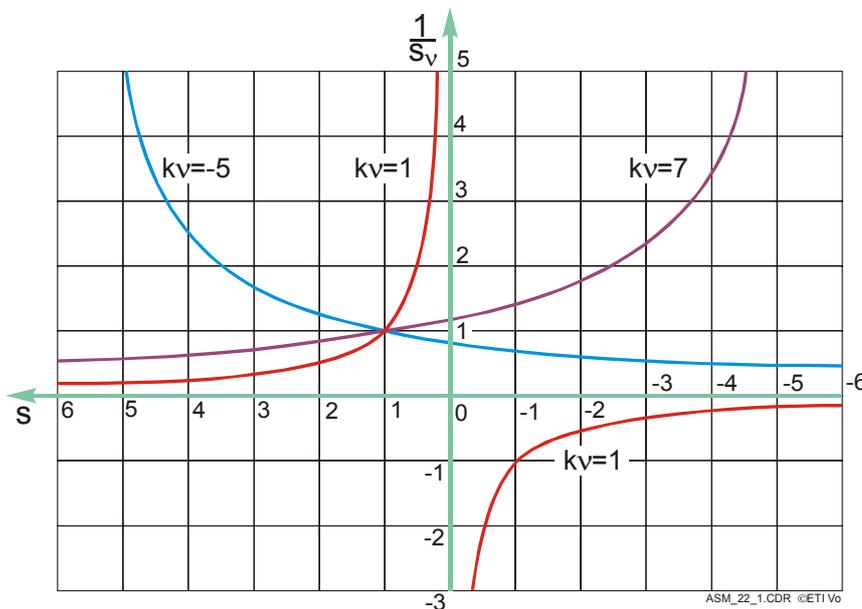


Bild 9.2: Faktor beim Rotorwiderstand  $\frac{1}{s_v}$

### Besondere Punkte:

- Drehzahl  $n=0 \rightarrow$  unabhängig von  $v$  wird  $s=1$  bzw.  $s_v=1$
- Synchrone Drehzahlen der Oberschwingungen liegen bei  $s_v=0$  oder  $s=1-\frac{v}{k}$

$$\text{z.B. } s_5 = 0 \rightarrow s = 6 \quad \text{oder} \quad s_7 = 0 \rightarrow s = -6$$

Mit Hilfe der Kloss'schen Formel kann man die Drehmomente abschätzen:

$$\frac{M_v}{M_{vk}} \approx \frac{2}{s_v + \frac{s_{vk}}{s_v}} \quad (9.24)$$

- Drehmoment sinkt quadratisch mit der Spannung

$$\left| \frac{M_{vk}}{M_{1k}} \right| = \left( \frac{U_{sv}}{v \cdot U_{S1}} \right)^2 \quad (9.25)$$

- Der Kippschlupf, bezogen auf den der Grundschwingung, wird mit wachsender Ordnungszahl kleiner

$$\frac{s_{vk}}{s_{1k}} = \frac{1}{k \cdot v} \quad (9.26)$$

Der Schlupf ist

$$s = 1 + \frac{v}{k}(s_v - 1) = 1 + \frac{v \cdot s_v}{k} - \frac{v}{k} \quad (9.27)$$

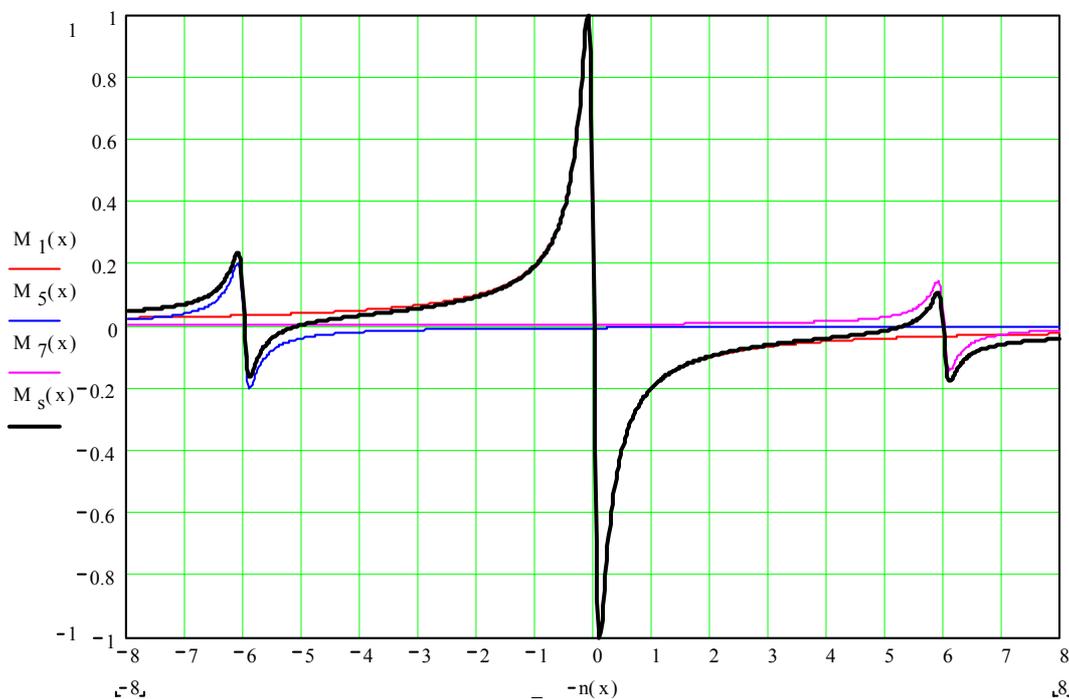


Bild 9.3: Drehmomente Grundschwingung, 5. und 7. Harmonische.

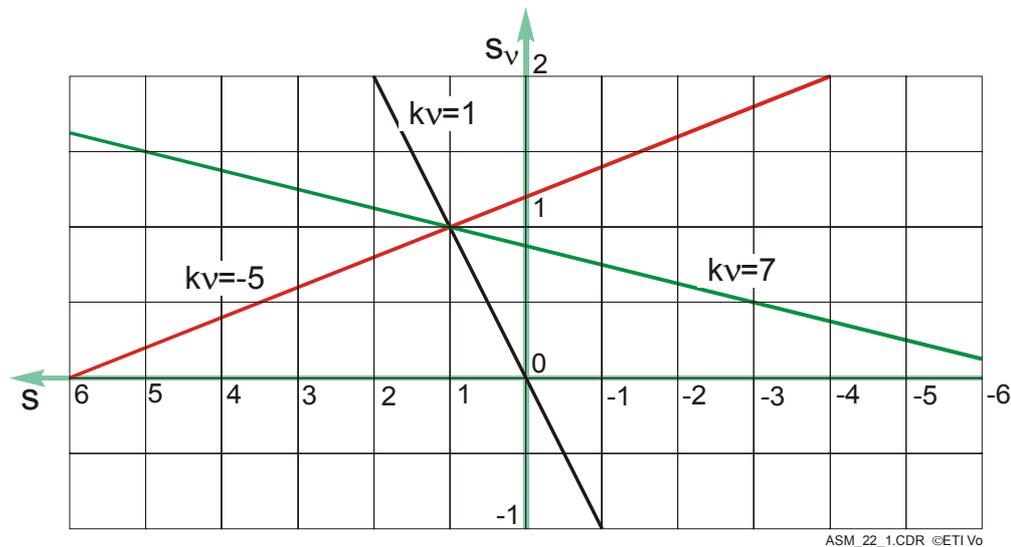


Bild 9.4: Änderung des Schlupfes  $s_v$  für die Oberschwingungen.

----- Rest muß noch bearbeitet werden -----

$$s_{5k} = 6 - s_{1k}$$

$$s_{7k} = -6 + s_{1k}$$

$$k \cdot v = -5$$

$$s_v = 1 - \frac{1-s}{kv}$$

$$s = \frac{k \cdot \Omega_s - \Omega}{k \Omega_s} \quad (9.28)$$

Bewegungsart ändert sich.  
Definition des Kippschlupfs

- Max. Drehmoment
- Bei  $dn < 0$

### ZEICHNUNG

Bild 9.5: Def. der Winkel

Negative Drehzahl

$$s_{-1} = \frac{-\Omega_s - \Omega}{-\Omega_s} = 1 + \frac{\Omega}{\Omega_s} \quad (9.29)$$

### ZEICHNUNG

Bild 9.6: Def. der Winkel

Näherung Klos'sche Formel

### ZEICHNUNG

$$\left. \frac{s}{M_k} \right|_{s \rightarrow 0} = \frac{2}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}} \approx \frac{2 \cdot s}{s_k}$$

Anwendung:

$$\frac{M}{M_k} \approx \frac{2 \cdot s - 1}{s_{k-1}}$$

1)  $s_{k-1} < 0$

2) Schlupfachse  $s_{-1}$  läuft mit  $\frac{n}{n_s}$

Zusammenhang zwischen  $s_{+1}$  und  $s_{-1}$ :

$$s_{-1} = 1 - \frac{(1-s)}{k \cdot v} = 1 + \frac{(1-s)}{-1} = 1 + 1 - s = 2 - s \quad (9.30)$$



## 11 Abschalten einer ASM

Eine Asynchronmaschine wird aus dem Motorbetrieb heraus ausgeschaltet. An den Klemmen des Ständers sei ein Widerstand  $R$  angeschlossen.

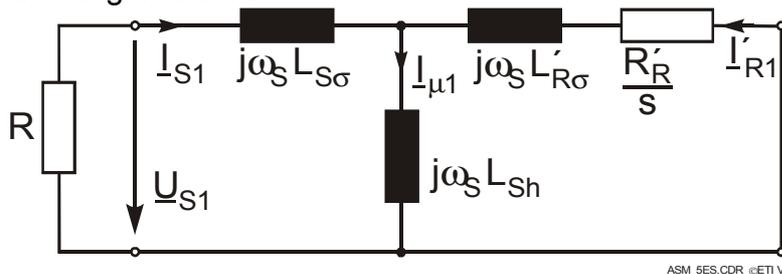
In der folgenden Rechnung sollen folgende Fragen beantwortet werden:

- Welcher Strom stellt sich nach dem Ausschalten in den Ständer- und Rotorwicklung ein?
- Wie groß ist der Magnetisierungsstrom?
- Wo wird die in den Induktivitäten der Maschine gespeicherte Energie umgesetzt?
- Was geschieht mit der im Rotor gespeicherten Energie?

### 11.1 Ausgangsbedingungen

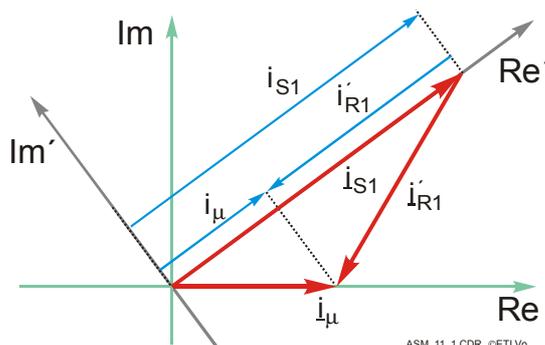
- Die Maschine sei im Motorbetrieb und es fließt vor dem Abschalten ein sinusförmiger Strom
- Es wird zu einem beliebigen Zeitpunkt abgeschaltet
- Zum Abschaltzeitpunkt fließt ein Ständerstrom  $i_{S0}$  und ein Rotorstrom  $i_{R0}$ ; die Differenz ist der Magnetisierungsstrom
- Es wird angenommen, dass sich während des el. Übergangsvorganges der Rotor mit konstanter Drehzahl weiterdreht. Wie die Rechnung im weiteren zeigen wird sind die el. Zeitkonstanten wesentlich kleiner als die mechanische.
- Der Rotorwiderstand  $R'_R/s$  wird als konstant angenommen und durch  $R_R$  dargestellt
- Stromverdrängung und sonstige Verluste werden vernachlässigt

Die Theorie ist in der Datei ASM\_aus.mcd dargestellt. Hier wird nur mit den Ergebnissen gerechnet.



ASM\_5ES.CDR ©ETI V6

Bild 11.1: Ersatzschaltbild



ASM\_11\_1.CDR ©ETI V6

Bild 11.2: Typisches Stellung der Raumzeiger bei Motorbetrieb der ASM

Aus den Raumzeigern können zum Schaltzeitpunkt durch Projektion der Zeiger auf die momentan gültige Zeitachse ( $Re'$ ) die Zeitwerte bestimmt werden. In Bild 11.2 ist hierbei die Richtung des Ständerstromraumzeigers gewählt.

## 11.2 Gleichungssystem

Der Ständer- und der Rotorstrom werden als Anfangswerte vorausgesetzt. Aus dem Ersatzschaltbild erhält man im Laplace Bereich

$$\begin{aligned} (R + s(L_h + L_{S\sigma})) \cdot i_S + sL_h \cdot i_R &= (L_h + L_{S\sigma}) \cdot i_{S0} + L_h \cdot i_{R0} \\ sL_h \cdot i_S + (R_R + s(L_h + L_{R\sigma})) \cdot i_R &= L_h \cdot i_{S0} + (L_h + L_{S\sigma}) \cdot i_{R0} \end{aligned} \quad (11.1)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden vorübergehend folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} (R + s(L_h + L_{S\sigma})) &= a \\ sL_h &= b \\ (L_h + L_{S\sigma}) \cdot i_{S0} + L_h \cdot i_{R0} &= c \\ (R_R + s(L_h + L_{R\sigma})) &= d \\ L_h \cdot i_{S0} + (L_h + L_{S\sigma}) \cdot i_{R0} &= f \end{aligned} \quad (11.2)$$

So dass das Gleichungssystem (11.1) nun lautet:

$$\begin{aligned} a \cdot i_S + b \cdot i_R &= c \\ b \cdot i_S + d \cdot i_R &= f \end{aligned}$$

Aus diesem Gleichungssystem 2. Ordnung kann  $i_S$  und  $i_R$  bestimmt werden:

$$\boxed{i_R = \frac{cb - fa}{b^2 - ad}} \quad \text{und} \quad \boxed{i_S = \frac{fb - cd}{b^2 - ad}} \quad (11.3)$$

Wenn man die Abkürzungen wieder in die Gleichungen eingesetzt, wird für die Ströme

$$i_R = \frac{((L_h + L_{S\sigma}) \cdot i_{S0} + L_h \cdot i_{R0}) \cdot sL_h - (L_h \cdot i_{S0} + (L_h + L_{S\sigma}) \cdot i_{R0}) \cdot (R + s(L_h + L_{S\sigma}))}{s^2 L_h^2 - (R + s(L_h + L_{S\sigma})) \cdot (R_R + s(L_h + L_{R\sigma}))} \quad (11.4)$$

$$i_S = \frac{sL_h \cdot (L_h \cdot i_{S0} + (L_h + L_{S\sigma}) \cdot i_{R0}) - (R_R + s(L_h + L_{R\sigma})) \cdot ((L_h + L_{S\sigma}) \cdot i_{S0} + L_h \cdot i_{R0})}{s^2 L_h^2 - (R + s(L_h + L_{S\sigma})) \cdot (R_R + s(L_h + L_{R\sigma}))} \quad (11.5)$$

Die Nenner sind gleich, was auf gleiches Zeitverhalten hindeutet.

## 11.3 Streufaktoren

Öfters tritt bei den folgenden Rechnungen der Faktor

$$\frac{L_{Sh} + L_{R\sigma}}{(L_{Sh} + L_{S\sigma}) \cdot (L_{Sh} + L_{R\sigma}) - L_{Sh}^2} \quad \text{auf.} \quad (11.6)$$

Durch Umformung mit  $L_{Sh}$  erhält man daraus:

$$\frac{\left(1 + \frac{L_{R\sigma}}{L_{Sh}}\right) \cdot \frac{1}{L_{Sh}}}{\left(1 + \frac{L_{S\sigma}}{L_{Sh}}\right) \cdot \left(1 + \frac{L_{R\sigma}}{L_{Sh}}\right) - 1} \quad (11.7)$$

Der Nenner  $\frac{1}{\left(1 + \frac{L_{S\sigma}}{L_{Sh}}\right) \cdot \left(1 + \frac{L_{R\sigma}}{L_{Sh}}\right) - 1}$  wird weiter umgeformt und die Ständer- und die

Rotorstreuung eingeführt:

$$\boxed{\frac{L_{S\sigma}}{L_{Sh}} = \sigma_S} \quad \text{und} \quad \boxed{\frac{L_{R\sigma}}{L_{Sh}} = \sigma_R} \quad (11.8)$$

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{L_{S\sigma}}{L_{Sh}}\right) \cdot \left(1 + \frac{L_{R\sigma}}{L_{Sh}}\right) - 1} = \frac{1}{(1 + \sigma_S) \cdot (1 + \sigma_R) - 1}$$

Es sei  $(1 + \sigma_S) \cdot (1 + \sigma_R) = k$  dann wird der Ausdruck

$$\frac{1}{k-1} = \frac{1}{\frac{(k-1)}{k} \cdot k} = \frac{\left(\frac{1}{k} + 1 - 1\right)}{1 - \frac{1}{k}} = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)}{1 - \frac{1}{k}} = \frac{1 - \sigma}{\sigma} \quad \text{wobei}$$

$$\boxed{\sigma = 1 - \frac{1}{(1 + \sigma_S) \cdot (1 + \sigma_R)}} \quad \text{der totale- oder Bondelsche Streufaktor ist.} \quad (11.9)$$

Beispiel:;  $\sigma_S = \sigma_R = 0,05$ ;  $\sigma = 0,929$  und  $\frac{1 - \sigma}{\sigma} = 9,75$ ;  $\frac{\sigma}{1 - \sigma} = 0,102$

Mit dem Bondelschen Streufaktor wird der ursprüngliche Ausdruck nach Gl.(11.6)

$$\frac{(1 + \sigma_R)}{L_{Sh}} \cdot \frac{1 - \sigma}{\sigma} \quad (11.10)$$

## 11.4 Rotorstrom $i_R$

Ausmultipliziert und nach Potenzen von  $s$  sortiert

$$i_R(s) = \frac{\left[-L_h \cdot \{(L_h + L_{S\sigma}) \cdot i_{S0} + i_{R0} \cdot L_h\} + (L_h + L_{S\sigma}) \cdot (i_{R0} \cdot (L_h + L_{R\sigma}) + L_h \cdot i_{S0})\right] \cdot s + (i_{R0} \cdot (L_h + L_{R\sigma}) + L_h \cdot i_{S0}) \cdot R}{s^2 L_h^2 - (R + s(L_h + L_{S\sigma})) \cdot (R_R + s(L_h + L_{R\sigma}))} \quad (11.11)$$

Diese Form korrespondiert mit der Funktion im Laplace Bereich

$$i_R(s) = \frac{E \cdot s + D}{s^2 + 2B \cdot s + C} = \frac{E \cdot s}{s^2 + 2B \cdot s + C} + \frac{D}{s^2 + 2B \cdot s + C} \quad (11.12)$$

Um für den Rotorstrom genau die Form nach Gl.(11.12) zu erreichen wird mit dem Koeffizienten, der sich vor  $s^2$  im Nenner ergibt, sowohl Zähler und Nenner dividiert und folgende Abkürzungen (E; D; B; C) gewählt:

$$E = \frac{-L_h \cdot \left\{ (L_h + L_{S\sigma}) \cdot i_{S0} + i_{R0} \cdot L_h \right\} + (L_h + L_{S\sigma}) \cdot (i_{R0} \cdot (L_h + L_{R\sigma}) + L_h \cdot i_{S0})}{(L_h + L_{S\sigma}) \cdot (L_h + L_{R\sigma}) - L_h^2}$$

Der Faktor E kann bis auf  $i_{R0}$  vereinfacht werden

$$E = \frac{-(L_h + L_{S\sigma}) \cdot i_{S0} \cdot L_h - L_h^2 \cdot i_{R0} + i_{R0} \cdot (L_h + L_{S\sigma})(L_h + L_{R\sigma}) + (L_h + L_{S\sigma}) \cdot i_{S0} \cdot L_h}{(L_h + L_{S\sigma}) \cdot (L_h + L_{R\sigma}) - L_h^2} \quad \text{oder}$$

$$E = \frac{\left( (L_h + L_{S\sigma}) \cdot (L_h + L_{R\sigma}) - L_h^2 \right) \cdot i_{R0}}{(L_h + L_{S\sigma}) \cdot (L_h + L_{R\sigma}) - L_h^2} = i_{R0} \quad (11.13)$$

$$D = \frac{(i_{R0} \cdot (L_h + L_{R\sigma}) + L_h \cdot i_{S0}) \cdot R}{(L_h + L_{S\sigma}) \cdot (L_h + L_{R\sigma}) - L_h^2} \quad (11.14)$$

$$B = \frac{R \cdot (L_h + L_{R\sigma}) + R_R \cdot (L_h + L_{S\sigma})}{2 \cdot \left[ (L_h + L_{S\sigma}) \cdot (L_h + L_{R\sigma}) - L_h^2 \right]} \quad (11.15)$$

$$C = \frac{R \cdot R_R}{(L_h + L_{S\sigma}) \cdot (L_h + L_{R\sigma}) - L_h^2} \quad (11.16)$$

Nun werden in diese Abkürzungen Streufaktoren und Zeitkonstanten eingeführt.

#### 11.4.1 Abkürzungen Streufaktoren und Zeitkonstanten

Wird im Nenner  $L_h^2$  ausgeklammert, so kann der oben definierte totale Streufaktor  $\sigma$  und Zeitkonstanten eingeführt werden.

Zeitkonstanten  $\boxed{\frac{R}{L_h} = \frac{1}{\tau_S}}$  und  $\boxed{\frac{R_R}{L_h} = \frac{1}{\tau_R}}$

**Faktor D:**

$$D = \frac{(1 - \sigma) \cdot \left\{ i_{S0} + (1 + \sigma_R) \cdot i_{R0} \right\}}{\sigma \cdot \tau_S} \quad (11.17)$$

**Für B wird entsprechend:**

$$B = \frac{(1 - \sigma) \cdot \left\{ (1 + \sigma_R) \cdot \frac{R}{L_h} + (1 + \sigma_S) \cdot \frac{R_R}{L_h} \right\}}{2 \cdot \sigma} = \frac{1}{\tau_S \cdot (1 + \sigma_S)} + \frac{1}{\tau_R \cdot (1 + \sigma_R)}$$

$$B = \frac{\frac{1}{\tau_S \cdot (1 + \sigma_S)} + \frac{1}{\tau_R \cdot (1 + \sigma_R)}}{2 \cdot \sigma} \quad (11.18)$$

**Aus C wird:**

$$C = \frac{R \cdot R_R}{(L_h + L_{S\sigma}) \cdot (L_h + L_{R\sigma}) - L_h^2} = \frac{1}{\frac{L_h}{R} \cdot \frac{L_h}{R_R} \cdot \left\{ \left( \frac{L_h + L_{S\sigma}}{L_h} \right) \cdot \left( \frac{L_h + L_{R\sigma}}{L_h} \right) - 1 \right\}}$$

$$C = \frac{1}{\tau_S \cdot \tau_R \cdot \{(1 + \sigma_S) \cdot (1 + \sigma_R) - 1\}} = \frac{1 - \sigma}{\tau_S \cdot \tau_R \cdot \sigma} \quad (11.19)$$

Nun kann die aus zwei Termen bestehende Funktion rücktransformiert werden:  
Der erste Term ergibt sich aus der Korrespondenztabelle der Laplace Transformation:

$$\frac{Es}{s^2 + 2B \cdot s + C} \Rightarrow E \cdot e^{-Bt} \cdot \left( \cos \omega t - \frac{B}{\omega} \cdot \sin \omega t \right) \quad (11.20)$$

wobei  $\omega = \sqrt{C - B^2}$  ist.

#### 11.4.2 Zusammenhang mit der Dämpfung d und Resonanzkreisfrequenz

$$\omega = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - d^2} = \sqrt{C} \cdot \sqrt{1 - \frac{B^2}{C}} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{C}}; \text{ und}$$

$$\boxed{d = \frac{B}{\sqrt{C}}} \quad \text{daraus} \quad B = d \cdot \sqrt{C} = d \cdot \omega_0$$

Die Dämpfung d und die Resonanzkreisfrequenz  $\omega_0$  kann noch in den Streuungen und Zeitkonstanten ausgedrückt werden.

$$d = \frac{B}{\sqrt{C}} = \frac{(1 - \sigma) \cdot \left\{ \frac{(1 + \sigma_R)}{R_R} + \frac{(1 + \sigma_S)}{R} \right\}}{2 \cdot \sigma \cdot \tau_S \cdot \tau_R} \sqrt{\frac{\tau_S \cdot \tau_R \cdot \sigma}{1 - \sigma}}$$

$$\boxed{d = \left\{ \frac{(1 + \sigma_R)}{2R_R} + \frac{(1 + \sigma_S)}{2R} \right\} \cdot \sqrt{\frac{(1 - \sigma)}{\sigma \cdot \tau_S \cdot \tau_R}}} \quad \text{Dämpfung} \quad (11.21)$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{C} = \sqrt{\frac{1 - \sigma}{\tau_S \cdot \tau_R \cdot \sigma}}} \quad \text{und die Kreisfrequenz} \quad (11.22)$$

Damit ist der erste Anteil des Rotorstroms

$$i_{R1}(t) = E \cdot e^{-d \cdot \omega_0 t} \cdot \left( \cos(\sqrt{1 - d^2} \cdot \omega_0 \cdot t) - \frac{d}{\sqrt{1 - d^2}} \cdot \sin(\sqrt{1 - d^2} \cdot \omega_0 \cdot t) \right) \quad (11.23)$$

Für den zweiten Anteil des Rotorstroms ergibt sich entsprechend jetzt gleich mit der Dämpfung d und der Kennkreisfrequenz

$$\frac{D}{s^2 + 2B \cdot s + C} \Rightarrow D \cdot e^{-d \cdot \omega_0 t} \cdot \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1 - d^2}} \cdot \sin(\sqrt{1 - d^2} \cdot \omega_0 \cdot t) \quad (11.24)$$

Der Rotorstrom ist die Summe der beiden Anteile:

$$\boxed{i_R(t) = e^{-d \cdot \omega_0 t} \cdot \left\{ E \cdot \cos(\sqrt{1 - d^2} \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{\sin(\sqrt{1 - d^2} \cdot \omega_0 \cdot t)}{\sqrt{1 - d^2}} \cdot \left( \frac{D}{\omega_0} - d \cdot E \right) \right\}} \quad (11.25)$$

## 11.5 Ständerstrom

Wird die Gleichung für den Ständerstrom (11.5) ausmultipliziert und nach s sortiert, erhält man:

$$i_s(s) = \frac{\left[ -L_h \cdot \left\{ (L_h + L_{S\sigma}) \cdot i_{R0} + i_{S0} \cdot L_h \right\} + (L_h + L_{R\sigma}) \cdot \left( i_{S0} \cdot (L_h + L_{S\sigma}) + L_h \cdot i_{R0} \right) \right] \cdot s + \left( i_{S0} \cdot (L_h + L_{S\sigma}) + L_h \cdot i_{R0} \right) \cdot R_R}{s^2 L_h^2 - (R + s(L_h + L_{S\sigma})) \cdot (R_R + s(L_h + L_{R\sigma}))} \quad (11.26)$$

Der Ständerstrom hat die allgemeine Form

$$i_s(s) = \frac{Fs + G}{s^2 + 2Bs + C} = \frac{Fs}{s^2 + 2Bs + C} + \frac{G}{s^2 + 2Bs + C} \quad (11.27)$$

weshalb folgende Abkürzungen eingeführt werden:

$$F = \frac{-L_h \cdot \left\{ (L_h + L_{S\sigma}) \cdot i_{R0} + i_{S0} \cdot L_h \right\} + (L_h + L_{R\sigma}) \cdot \left( i_{S0} \cdot (L_h + L_{S\sigma}) + L_h \cdot i_{R0} \right)}{(L_h + L_{S\sigma}) \cdot (L_h + L_{R\sigma}) - L_h^2} \quad (11.28)$$

dieser Ausdruck kann bis auf  $i_{S0}$  vereinfacht werden.

$$\boxed{F = i_{S0}}$$

$$G = \frac{\left( i_{S0} \cdot (L_h + L_{S\sigma}) + L_h \cdot i_{R0} \right) \cdot R_R}{(L_h + L_{S\sigma}) \cdot (L_h + L_{R\sigma}) - L_h^2} \quad (11.29)$$

Der Nenner ist mit dem bei dem Rotorstrom identisch. Deshalb ist der Ständerstrom.

$$\boxed{i_s(t) = e^{-d\omega_0 t} \cdot \left\{ F \cdot \cos(\sqrt{1-d^2} \cdot \omega_0 \cdot t) + \left( \frac{G}{\omega_0} - d \cdot F \right) \cdot \frac{\sin(\sqrt{1-d^2} \cdot \omega_0 \cdot t)}{\sqrt{1-d^2}} \right\}} \quad (11.30)$$

Aus den beiden Strömen kann durch Addition auch der Magnetisierungsstrom ermittelt werden:

$$\boxed{i_\mu(t) = e^{-d\omega_0 t} \cdot \left\{ (E + F) \cdot \cos(\sqrt{1-d^2} \cdot \omega_0 \cdot t) + \left( \frac{G + D}{\omega_0} - d \cdot (E + F) \right) \cdot \frac{\sin(\sqrt{1-d^2} \cdot \omega_0 \cdot t)}{\sqrt{1-d^2}} \right\}} \quad (11.31)$$

Wobei E; F; G; D die oben definierten Konstanten sind.

## 11.6 Zusammenfassung

Die Dämpfung d nach Gl.(11.21) ist immer  $>1$ , so dass sich für die Verläufe der Ströme hyperbolische Funktionen ergeben. Dies ist bei der Berechnung zu beachten. Der Ständerstrom klingt mit kleiner Zeitkonstante relativ schnell ab. In gleichem Maß geht auch der Rotorstrom zurück und klingt auf den Magnetisierungsstrom auf. Bei ursprünglichem Motorbetrieb dreht der Rotorstrom sein Vorzeichen um. Der Magnetisierungsstrom bestimmt also wegen der großen Hauptinduktivität die Ströme nach der Kommutierung.

Während der Kommutierung des Stromes tritt an dem relativ großen Widerstand  $R$  an den Ständerklemmen eine hohe Spannung auf. In der Praxis wird diese Spannung durch die in der Regel im speisenden Stromrichter vorhandenen Freilaufdioden auf die Zwischenkreisspannung begrenzt, so dass unter Umständen die Kommutierung etwas anders abläuft.

Nach der Kommutierung fließt im Ständerkreis nur noch ein sehr geringer Strom, wenn  $R \gg R_R$  ist. Falls beide Widerstände ( $R$  und  $R_R$ ) gleich groß werden, sind Ständerkreis und Rotorkreis natürlich gleichwertig. Aus dem Ständerstrom und dem angeschlossenen Widerstand  $R$  lässt sich auch die Klemmenspannung bestimmen (Bild 11.4).

Die in den Induktivitäten gespeicherte Energie wird nur zum kleinen Teil in dem an den Ständerklemmen angeschlossenen Widerständen umgesetzt; der größte Teil der Energie wird im Rotorwiderstand umgesetzt.

Die im Rotor gespeicherte rotatorische Energie wird in den Lagern in Wärme umgesetzt.

Die Verhältnisse ändern sich, wenn der Ständerwiderstand in die Größenordnung des Rotorwiderstandes gelangt. In diesem Fall kann auch ein bremsendes Drehmoment auftreten.

#### Parameter:

$$R = 20 \, \Omega ; R_R = 0,07 \, \Omega \quad L_h = 31 \, \text{mH} ; L_{S\sigma} = 1,55 \, \text{mH} ; i_{S0} = 50 \, \text{A} ; i_{R0} = -40 \, \text{A} \\ d = 27 ; T = 8,38 \, \text{ms}$$

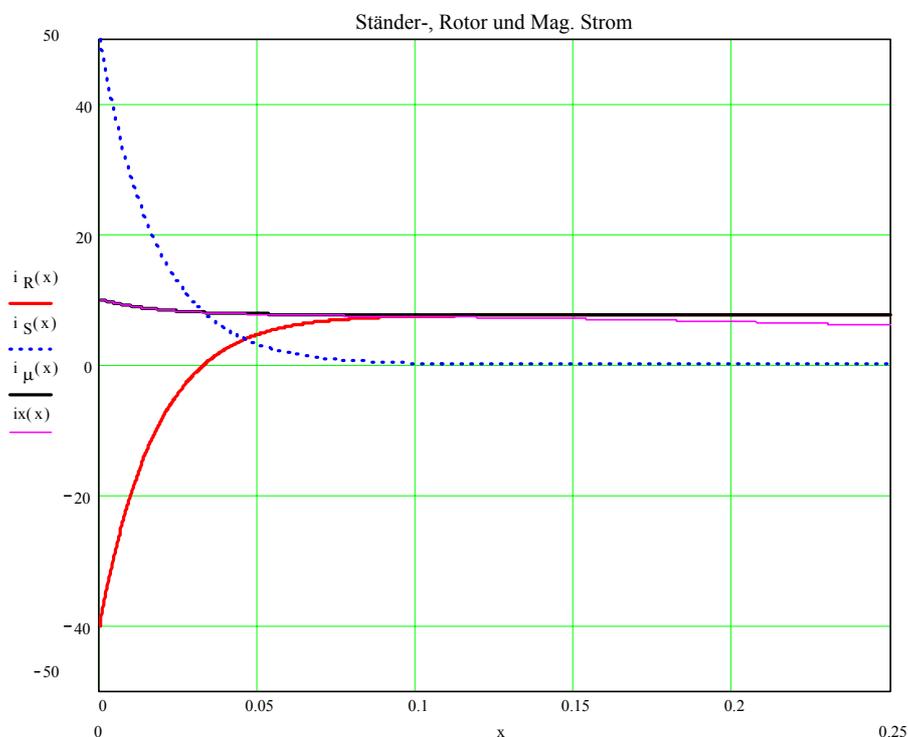


Bild 11.3: Verlauf der Ströme  $x=t/T$  (auf  $T$  bezogene Zeit)

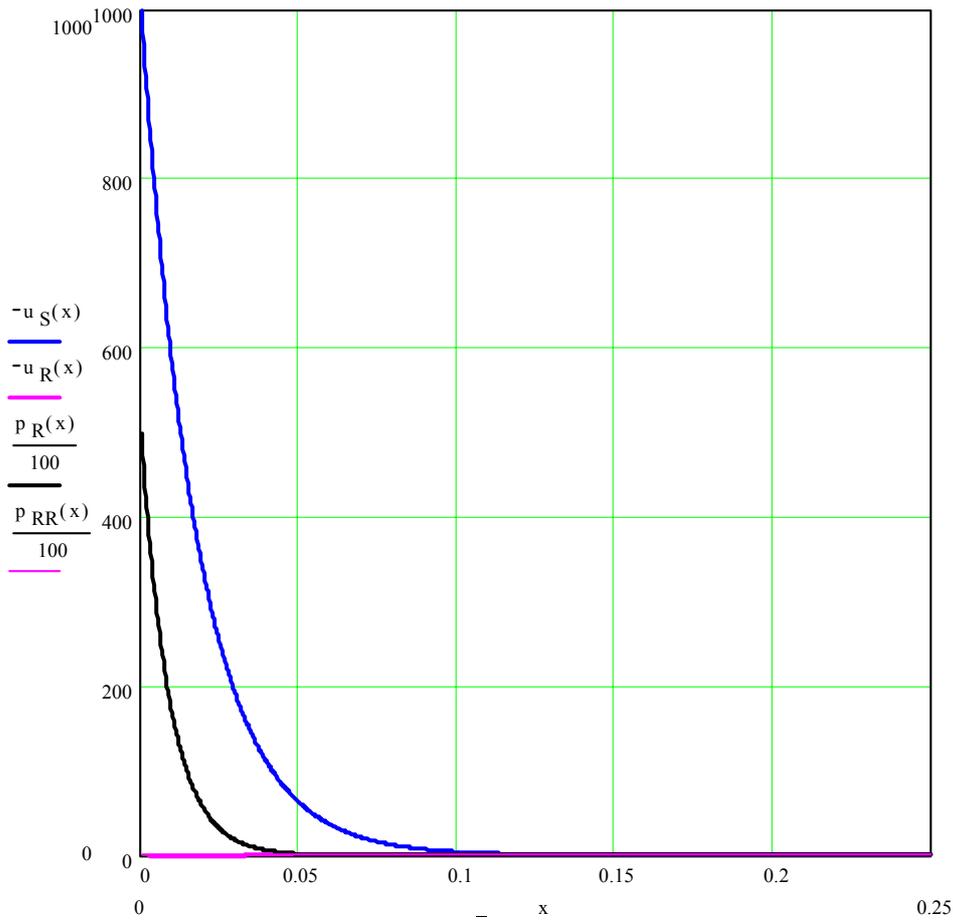


Bild 11.4: Verlauf der Spannungen und der Momentanleistungen an den Widerständen  $R$  und  $R_R$ .



## 12 Asynchronmaschine am unsymmetrischen Netz

Die Spannungen sind sinusförmig, haben aber verschiedene Amplituden und Phasen. Die unsymmetrischen Spannungen seien quasistationär, was bedeutet, daß sich die Amplituden bzw. die Frequenz nicht ändern. Dieser Fall tritt z.B. auf wenn ein Strang der Maschine wegen einem Fehler kurzgeschlossen ist, oder wenn eine Netzphase ausgefallen ist. In diesem Abschnitt wird für diese Probleme das Verfahren der Zerlegung in Mit- Gegen- und Nullkomponente angegeben. Das beliebig unsymmetrische Spannungssystem wird durch dieses Verfahren in drei jeweils symmetrische Spannungs- bzw. Stromsysteme zerlegt. Die symmetrischen Systeme kann man dann wie zuvor beschrieben getrennt auf die Maschine wirken lassen und die Ergebnisse wegen dem linearen System linear überlagern.

Normalerweise ist das unsymmetrische Drehspannungssystem z.B. in der Form  $\underline{U}_{S1}$ ,  $\underline{U}_{S2}$  und  $\underline{U}_{S3}$  gegeben. Daraus werden die symmetrischen Komponenten  $\underline{U}_{Sm}$ ,  $\underline{U}_{Sg}$ ,  $\underline{U}_{S0}$  bestimmt. Die Ersatzschaltbilder liefern dann für die vorgegebene Drehzahl die symmetrischen Komponenten der Ströme  $\underline{I}_{Sm}$ ,  $\underline{I}_{Rm}$ ,  $\underline{I}_{Sg}$ ,  $\underline{I}_{Rg}$  und  $\underline{I}_{S0}$ . Damit sind Zeitwert und Mittelwert des inneren Drehmoments und die Stromwärmeverluste berechenbar.

### 12.1 Symmetrische Komponenten

Die Spannungen werden mit Hilfe des komplexen Zeitwertes beschrieben. Wegen der cos-Funktion schreibt man z.B. für die Spannung in Phase R:

$$u_R = \frac{\underline{u}_R + \underline{u}_R^*}{2} \quad \text{mit} \quad \underline{u}_R = \sqrt{2} \cdot U_R \cdot e^{j\omega_s t} \cdot e^{j\phi_R} = \sqrt{2} \cdot \underline{U}_R \cdot e^{j\omega_s t}$$

$$\begin{pmatrix} u_{S1} \\ u_{S2} \\ u_{S3} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} U_{S1} \cdot \cos(\omega t + \alpha_{S1}) \\ U_{S2} \cdot \cos(\omega t + \alpha_{S2}) \\ U_{S3} \cdot \cos(\omega t + \alpha_{S3}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{pmatrix} e^{j\omega_s t} + \begin{pmatrix} \underline{U}_R^* \\ \underline{U}_S^* \\ \underline{U}_T^* \end{pmatrix} e^{-j\omega_s t} \right\} \quad (12.1)$$

Transformation angewendet  $(\underline{u}_s) = (C_S)^{*T} (u_s)$

$$(C_S)^{*T} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} e^{j\gamma_s} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\gamma_s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oder daraus}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_{S1} \\ \underline{u}_{S1}^* \\ \underline{u}_0 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot 3 \cdot \left\{ \begin{bmatrix} e^{j\gamma_s} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\gamma_s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{pmatrix} e^{j\omega_s t} \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} e^{j\gamma_s} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\gamma_s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_S^* \\ \underline{U}_R^* \\ \underline{U}_T^* \end{pmatrix} e^{-j\gamma_s t} \right\} \quad (12.2)$$

### 12.1.1 Definition von Mit- Gegen- und Nullsystem

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_{Sm} \\ \underline{U}_{Sg} \\ \underline{U}_{S0} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot (x)^{*T}} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Mitsystem} \\ \text{Gegensystem} \\ \text{Nullsystem} \end{array} \quad (12.3)$$

Jedes unsymmetrische Drehspannungssystem kann man in drei symmetrische Systeme: Mit-, Gegen- und Nullsystem zerlegen.

Die Berechnung für den Raumzeiger liefert

$$\underline{u}_{S1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot 3}{\sqrt{3}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_R + a \cdot \underline{U}_S + a^2 \cdot \underline{U}_T) \cdot e^{j(\gamma_S + \omega_S t)} \\ + \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_R^* + a \cdot \underline{U}_S^* + a^2 \cdot \underline{U}_T^*) \cdot e^{j(\gamma_S - \omega_S t)} \end{array} \right\} \quad (12.4)$$

konjugent komplex

$$\text{Es ist } \frac{1}{3} \cdot \left\{ (\underline{U}_R^* + a \cdot \underline{U}_S^* + a^2 \cdot \underline{U}_T^*) \right\}^* = \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_R + a^2 \cdot \underline{U}_S + a \cdot \underline{U}_T)^* = \underline{U}_{Sg}$$

Durch diese Umformung wird der Raumzeiger:

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \left[ \underline{U}_{Sm} e^{j(\omega_S t + \gamma_S)} + \underline{U}_{Sg}^* \cdot e^{-j(\omega_S t - \gamma_S)} \right] \quad (12.5)$$

Die Nullkomponente wird:

$$u_{S0} = \frac{\sqrt{2} \cdot 3}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \left( \underbrace{\frac{1}{3} (\underline{U}_R + \underline{U}_S + \underline{U}_T) \cdot e^{j\omega_S t}}_{u_{S0}} + \frac{1}{3} \underbrace{(\underline{U}_R^* + \underline{U}_S^* + \underline{U}_T^*) e^{-j\omega_S t}}_{x^*} \right) \quad (12.6)$$

wegen  $x + x^* = 2 \cdot \text{Re}(x)$  wird daraus:

$$u_{S0} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{2}} \cdot \text{Re} \left\{ \underline{U}_{S0} \cdot e^{j\omega_S t} \right\} = \sqrt{6} \cdot \text{Re} \left\{ \underline{U}_{S0} \cdot e^{j\omega_S t} \right\} \quad (12.7)$$

$$\underline{u}_{S0} = \sqrt{6} \cdot \text{Re} \left\{ \underline{U}_{S0} \cdot e^{j\omega_S t} \right\}$$

Erläuterung zum Mit-, Gegen- und Nullsystem

### 12.1.2 Beispiel reines Mitsystem

Bei einem reinen Mitsystem folgt auf die Phase R folgt S und dann T. Dies wird auch als ein rechtsdrehendes System bezeichnet.

Der komplexe Effektivwert  $\underline{U}_R$  liegt beliebig in der komplexen Ebene. Die Phasenwinkel sind wegen des reinen Mitsystems

$$\alpha_R \text{ beliebig} \quad \alpha_S = \alpha_R - \frac{2\pi}{3} \quad \text{und} \quad \alpha_T = \alpha_R - \frac{4\pi}{3}$$

$\underline{U}_R$  beliebig in der kompl. Ebene  
 $\underline{U}_S = a^2 \cdot \underline{U}_R$  ist demgegenüber um  $120^\circ$   
 $\underline{U}_T = a \cdot \underline{U}_R$  um  $240^\circ$  gedreht

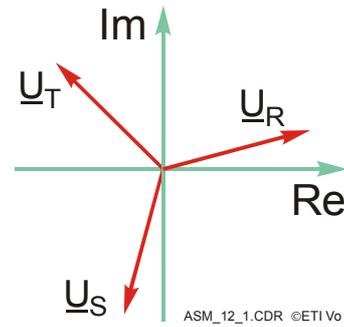


Bild 12.1: Komplexe Effektivwerte bei einem reinen Mitsystem

Eingesetzt wird daraus:

$$\underline{U}_{Sm} = \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_R + a \cdot a^2 \cdot \underline{U}_R + a^3 \cdot \underline{U}_R) = \underline{U}_R \quad (12.8)$$

$$\underline{U}_{Sg} = \frac{1}{3} (\underline{U}_R + a^2 \cdot a^2 \cdot \underline{U}_R + a \cdot a \cdot \underline{U}_R)^* = 0 \quad (12.9)$$

$$\underline{U}_{S0} = \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_R + a^2 \cdot \underline{U}_R + a \cdot \underline{U}_R) = 0 \quad (12.10)$$

Erwartungsgemäß ist das Gegen- und Nullsystem verschwunden.

### 12.1.3 Beispiel reines Gegensystem

Bei einem reinen Gegensystem folgt auf die Phase R als nächste T und dann S. Dies wird auch als ein linksdrehendes System bezeichnet.

Der komplexe Effektivwert  $\underline{U}_R$  liegt wieder beliebig in der komplexen Ebene. Die Phasenwinkel sind wegen der reinen Gegensystems

$$\alpha_R \text{ beliebig} \quad ; \quad \alpha_S = \alpha_R - \frac{4\pi}{3} \quad \text{und} \quad \alpha_T = \alpha_R - \frac{2\pi}{3}$$

$\underline{U}_R$  beliebig in der kompl. Ebene  
 $\underline{U}_S = a \cdot \underline{U}_R$  ist demgegenüber um  $120^\circ$   
 $\underline{U}_T = a^2 \cdot \underline{U}_R$  um  $240^\circ$  gedreht

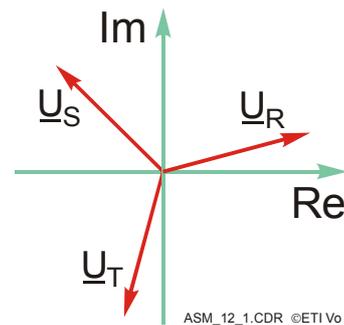


Bild 12.2: Komplexe Effektivwerte bei einem reinen Linkssystem.

Eingesetzt wird daraus:

$$\underline{U}_{Sm} = \frac{1}{3} (\underline{U}_R + a \cdot a \cdot \underline{U}_R + a^2 \cdot a^2 \cdot \underline{U}_R) = 0 \quad (12.11)$$

$$\underline{U}_{Sg} = \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_R + a^2 \cdot a \cdot \underline{U}_R + a \cdot a^2 \cdot \underline{U}_R) = \underline{U}_R \quad (12.12)$$

$$\underline{U}_{S0} = \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_R + a \cdot \underline{U}_R + a^2 \cdot \underline{U}_R) = 0 \quad (12.13)$$

### 12.1.4 Beispiel reines Nullsystem

Falls ein reines Nullsystem vorhanden ist sind alle drei Spannungen gleichphasig und die Amplituden sind gleich groß.

$$\alpha_R = \alpha_S = \alpha_T$$

$\underline{U}_R$  beliebig in der kompl. Ebene

$$\underline{U}_S = \underline{U}_R$$

$$\underline{U}_T = \underline{U}_R$$

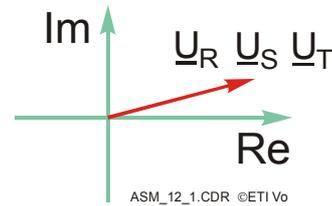


Bild 12.3: Komplexe Effektivwerte bei einem reinen Nullsystem.

$$\underline{u}_{Sm} = 0 \quad ; \quad \underline{u}_{Sg} = 0 \quad ; \quad \underline{u}_{S0} = \underline{u}_{S1}$$

### 12.1.5 Umkehrung der symmetrischen Komponenten

Die Inversion der Matrix liefert die komplexen Effektivwerte der Strangspannungen.

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{Sm} \\ \underline{U}_{Sg} \\ \underline{U}_{S0} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} \underline{U}_{Sm} + \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix} \underline{U}_{Sg} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \underline{U}_{S0} \quad (12.14)$$

Die Winkel der komplexen Effektivwerte erhält man aus:

$$\varphi_i = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}(\underline{U}_i)}{\text{Re}(\underline{U}_i)} \right\} \quad i = \{R, S, T\} \quad (12.15)$$

Die Zeitwert kann man wieder durch

$$u_i(t) = \text{Re} \left\{ \underline{U}_i \cdot e^{j(\omega t + \gamma_s)} \right\} \quad \text{mit} \quad i = \{R, S, T\} \quad \text{erhalten.} \quad (12.16)$$

## 12.2 Beispiele zu den symmetrischen Komponenten

### 12.2.1 Mit- und negative Gegenkomponente

Zunächst wird hier die Effektivwerte nach Gl.(12.17) gewählt.

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{Sm} \\ \underline{U}_{Sg} \\ \underline{U}_{S0} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0 \cdot e^{j0^\circ} \\ -1,0 \cdot e^{j0^\circ} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot U_R \quad ; \quad \begin{bmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \cdot e^{-j90^\circ} \\ \sqrt{3} \cdot e^{j90^\circ} \end{pmatrix} \cdot U_R \quad (12.17)$$

Als Komplexe Effektivwerte der drei Spannungen ergeben sich dann nach Gl.(xx) folgende Werte:

$$\underline{U}_R = \underline{U}_{Sm} + \underline{U}_{Sg} = 0$$

$$\underline{U}_S = a^2 \cdot \underline{U}_{Sm} + a^2 \cdot \underline{U}_{Sg} = (a^2 - a) \cdot U_R = \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot U_R = -j \cdot \sqrt{3} \cdot U_R$$

$$\underline{U}_T = a \cdot \underline{U}_{Sm} + a^2 \cdot \underline{U}_{Sg} = (a - a^2) \cdot U_R = +j \cdot \sqrt{3} \cdot U_R$$

Und der zugehörige Raumzeiger:

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot [ \underline{U}_{Sm} \cdot e^{j\omega_s t} + \underline{U}_{Sg} \cdot e^{-j\omega_s t} ] = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{(e^{j\omega_s t} - e^{-j\omega_s t}) \cdot 2}{2} \cdot U_R$$

oder weiter umgeformt

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot j \cdot U_R \cdot \sin \omega_s t = j \cdot \sqrt[2,44]{6} \cdot U_R \cdot \sin \omega_s t$$

Der Raumzeiger hat nur eine imaginäre Komponente, die mit einer Sinusfunktion schwingt (Bild 12.4). Die Spannung  $U_R$  ist Null und die beiden anderen sind invers zueinander.

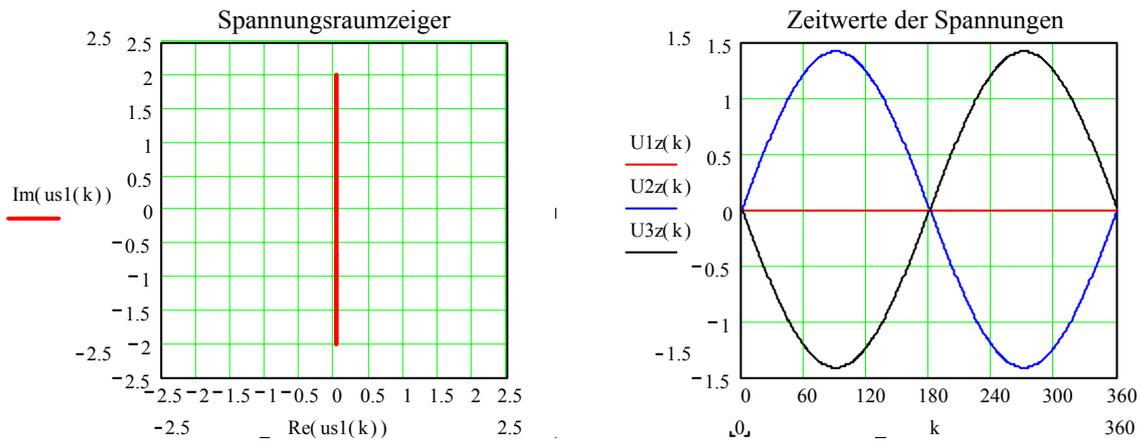


Bild 12.4: Spannungsräumzeiger und Zeitwerte

### 12.2.2 Beispiel 2 zur Mit- und Gegenkomponente

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_{Sm} \\ \underline{U}_{Sg} \\ \underline{U}_{S0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0 \cdot e^{j0^\circ} \\ 0,5 \cdot e^{j90^\circ} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot U_R \quad ; \quad \begin{pmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,118 \cdot e^{j26^\circ} \\ 1,455 \cdot e^{-j129^\circ} \\ 0,62 \cdot e^{j96,2^\circ} \end{pmatrix} \cdot U_R$$

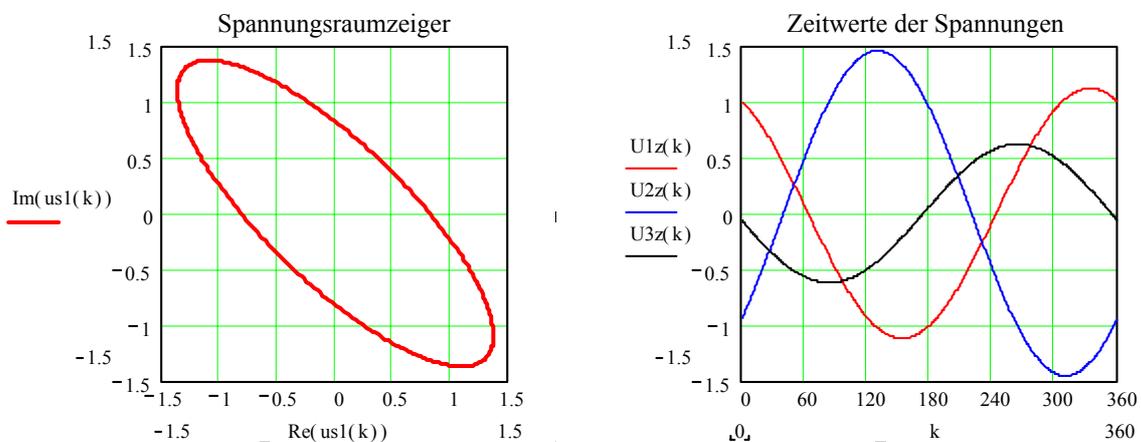


Bild 12.5: Spannungsräumzeiger und Zeitwerte

### 12.2.3 Beispiel 3 zur Mit- und Gegenkomponente

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_{Sm} \\ \underline{U}_{Sg} \\ \underline{U}_{S0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \cdot e^{j0^\circ} \\ 0,5 \cdot e^{j0^\circ} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot U_R \quad ; \quad \begin{pmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \cdot e^{j0^\circ} \\ 0,86 \cdot e^{-j150^\circ} \\ 0,86 \cdot e^{j150^\circ} \end{pmatrix} \cdot U_R$$

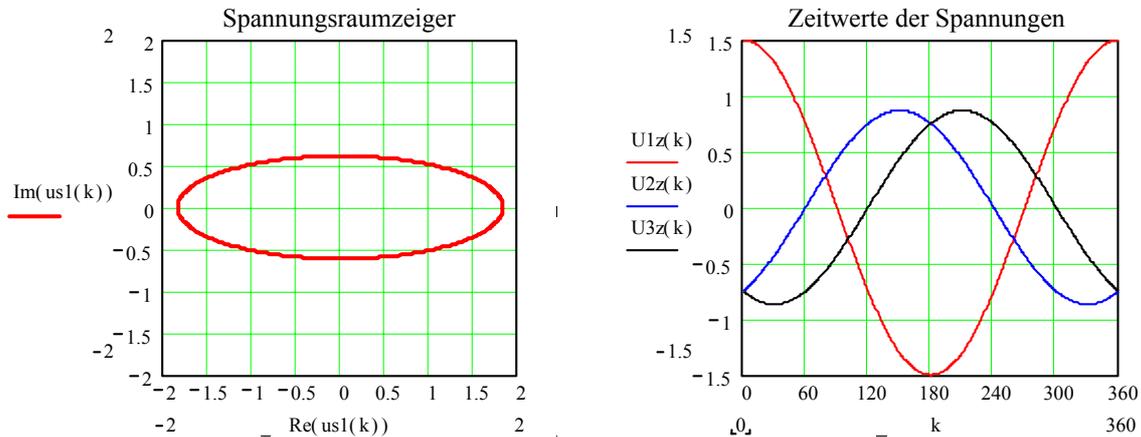


Bild 12.6: Spannungsräumzeiger und Zeitwerte

## 12.3 Anwendung auf die ASM

Wenn eine Drehstrommaschine oder ganz allgemein ein Drehstromverbraucher mit einem unsymmetrischen Spannungssystem gespeist wird, ist es vorteilhaft dieses unsymmetrische System in die Mit-, gegen- und Nullkomponente zu zerlegen. Zu beachten ist, daß dieses Verfahren wegen der Definition der komplexen Effektivwerte von Mit-, Gegen- und Nullkomponente nur für den stationären Betrieb zulässig ist.

Dabei wählt man dann das meistens noch freie Bezugssystem so, dass der vom Mitsystem bestimmte Anteil des Spannungsräumzeigers konstant wird, also:

$$\gamma_S = -\omega_S \cdot t + \gamma_{S0} \quad \gamma_R = -\omega_S \cdot t + \gamma_{S0} \quad (12.18)$$

$$\dot{\gamma}_S = -\omega_S \quad \dot{\gamma}_R = -\left(\omega_S - \dot{\gamma}\right) = -s \cdot \omega_S \quad (12.19)$$

$$\dot{\gamma} = const$$

Der Spannungsräumzeiger wird dann:

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \left[ \underline{U}_{Sm} \cdot e^{j\gamma_{S0}} + \underline{U}_{Sg}^* \cdot e^{-j(2\omega_S t - \gamma_{S0})} \right] \quad (12.20)$$

Die Anteile der Gegenkomponente wirken mit der doppelten Frequenz auf die Maschine.

Die beiden Anteile von  $\underline{u}_{S1}$  lässt man in der Rechnung getrennt als Mit- und Gegensystem auf das lineare System wirken und überlagert dann die Ergebnisse.

### 12.3.1 Anteil des Mitsystems

$$(\gamma_S = -\omega_S \cdot t) \quad ; \quad \gamma_R = \gamma + \gamma_S \quad ; \quad \dot{\gamma} = -(\omega_S + \dot{\gamma}) = -s \cdot \omega_S$$

Ansätze für den Ständer- und Rotorstrom

$$\underline{i}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{I}_{Sm} \cdot e^{j\gamma_{S0}} \quad ; \quad \underline{i}'_{R1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{I}_{Rm} \cdot e^{j\gamma_{S0}} \quad (12.21)$$

führen wie früher zu folgenden Gleichungen

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{U}_{Sm} \cdot e^{j\gamma_{S0}} = R_S \cdot \underline{I}_{Sm} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot e^{j\gamma_{S0}} + j\omega_S \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{\Psi}_{Sm} \cdot e^{j\gamma_{S0}} + \frac{d}{dt} \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{\Psi}_{Sm} \cdot e^{j\gamma_{S0}} \right) \quad (12.22)$$

$$0 = R'_R \cdot \underline{I}'_{Rm} \cdot e^{j\gamma_{S0}} - j\dot{\gamma}_R \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{\Psi}'_{Rm} \cdot e^{j\gamma_{S0}} \quad (12.23)$$

Wegen der Wahl des Bezugssystems verschwindet die zeitliche Ableitung des Flusses für das Mitsystem. Im gewählten Bezugssystem ist der Fluss eine Gleichgröße.

**Flüsse aufgeschlüsselt:**

$$\underline{u}_{Sm} = R_S \cdot \underline{I}_{Sm} + j\omega_S \cdot \underbrace{\left[ (L_{Sh} + L_{S\sigma}) \cdot \underline{I}_{Sm} + L_{Sh} \cdot \underline{I}'_{Rm} \right]}_{\underline{\Psi}_{Sm}} \quad (12.24)$$

$$0 = R'_R \cdot \underline{I}'_{Rm} + j s \cdot \omega_S \cdot \underbrace{\left[ L_{Sh} \cdot \underline{I}_{Sm} + (L_{Sh} + L_{R\sigma}) \cdot \underline{I}'_{Rm} \right]}_{\underline{\Psi}_{Rm}} \quad (12.25)$$

Division der 2. Gleichung durch  $s$  ergibt:

$$\underline{U}_{Sm} = R_S \cdot \underline{I}_{Sm} + j\omega_S \cdot L_{S\sigma} \cdot \underline{I}_{Sm} + j\omega_S \cdot L_{Sh} (\underline{I}_{Sm} + \underline{I}_{Rm}) \quad (12.26)$$

$$0 = \frac{R'_R \cdot \underline{I}_{Rm}}{s} + j\omega_S \cdot L_{R\sigma} \cdot \underline{I}_{Rm} + j\omega_S \cdot L_{Sh} \cdot \underbrace{(\underline{I}_{Sm} + \underline{I}_{Rm})}_{\underline{I}_{\mu m} = \underline{I}_{Sm} + \underline{I}_{Rm}} \quad (12.27)$$

$$\underline{U}_{Sm} = (R_S + j\omega_S L_{S\sigma}) \cdot \underline{I}_{Sm} + j\omega_S \cdot L_{Sh} \cdot \underline{I}_{\mu m} \quad (12.28)$$

$$0 = \left( \frac{1}{s} R'_R + j\omega_S L_{R\sigma} \right) \cdot \underline{I}'_{Rm} + j\omega_S \cdot L_{Sh} \cdot \underline{I}_{\mu m} \quad (12.29)$$

$$\underline{I}_{\mu m} = \underline{I}_{Sm} + \underline{I}'_{Rm} \quad (12.30)$$

Aus diesen drei Gleichungen kann das bekannte T-Ersatzschaltbild der Asynchronmaschine für den stationären Fall gezeichnet werden.

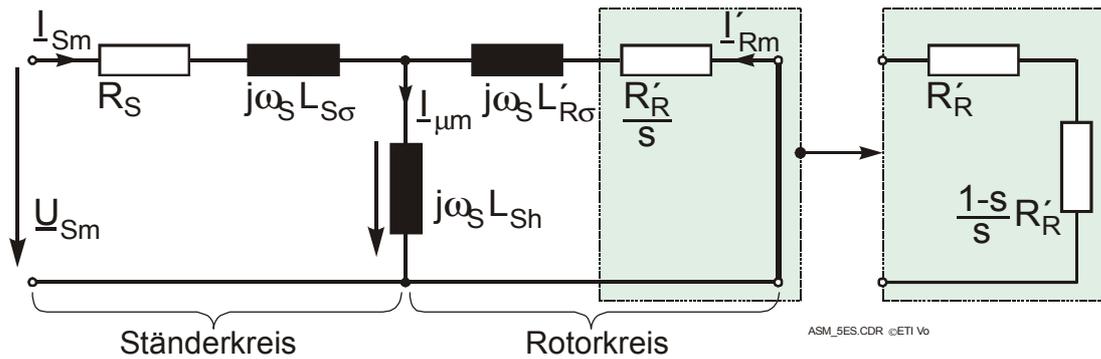


Bild 12.7: Ersatzschaltbild der Asynchronmaschine für die Mitkomponente (Grundschwingung)

Der Rotorwiderstand  $\frac{R'_R}{s}$  lässt sich wie üblich zerlegen, damit die Rotorverluste eindeutig zugeordnet werden können.

$$\frac{R'_R}{s} = R'_R + \frac{1-s}{s} \cdot R'_R$$

### 12.3.2 Anteil des Gegensystems

Mit den Ansätzen für die Ströme

$$\underline{i}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{I}_{Sg}^* e^{-j(2\omega_S t - \gamma_{S0})} \quad \text{und} \quad \underline{i}'_{R1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{I}'_{Rg} e^{-j(2\omega_S t - \gamma_{S0})} \quad (12.31)$$

erhält man aus der weiteren Herleitung das Ersatzschaltbild der ASM für die Gegenkomponente.

Beim Gegensystem verschwindet die zeitliche Ableitung des Flusses *nicht*, weil im Exponent  $e^{j2\omega_S t}$  auftritt. (Falls das Bezugssystem auf das Gegensystem gelegt wird, würde die Ableitung im Mitsystem auftreten). Aus der Spannungsgleichung des Ständers wird wegen  $-\dot{\gamma}_S = \omega_S$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{U}_{Sg}^* \cdot e^{-j(2\omega_S t - \gamma_{S0})} &= R_S \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{I}_{Sg}^* \cdot e^{-j(\dots)} + j\omega_S \left[ \begin{aligned} &(L_{Sh} + L_{S\sigma}) \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{I}_{Sg}^* \cdot e^{-j(\dots)} \\ &+ L_{Sh} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{I}'_{Rg} \cdot e^{-j(2\omega_S t - \gamma_{S0})} \end{aligned} \right] \\ &+ (L_{Sh} + L_{S\sigma}) \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{I}_{Sg}^* \cdot e^{-j(2\omega_S t - \gamma_{S0})} \cdot (-j2\omega_S) \\ &+ L_{Sh} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{I}'_{Rg} \cdot e^{-j(2\omega_S t - \gamma_{S0})} \cdot (-j2\omega_S) \end{aligned} \quad (12.32)$$

Vereinfacht, zusammengefasst und konjugiert komplex wird daraus:

$$\underline{U}_{Sg} = R_S \cdot \underline{I}_{Sg} + j\omega_S \cdot \begin{pmatrix} -(L_{Sh} + L_{S\sigma}) \cdot \underline{I}_{Sg} + 2 \cdot (L_{Sh} + L_{S\sigma}) \cdot \underline{I}_{Sg} \\ -L_{Sh} \cdot \underline{I}'_{Rg} + 2 \cdot L_{Sh} \cdot \underline{I}'_{Rg} \end{pmatrix} \quad (12.33)$$

oder

$$\underline{U}_{Sg} = (R_S + j\omega_S \cdot L_{S\sigma}) \cdot \underline{I}_{Sg} + j\omega_S \cdot L_{Sh} \cdot \underbrace{(\underline{I}_{Sg} + \underline{I}_{Rg})}_{\underline{I}_{\mu g}} \quad (12.34)$$

$$\underline{I}_{\mu g} = \underline{I}_{Sg} + \underline{I}_{Rg} \quad \text{Magnetisierungsstrom des Gegensystems} \quad (12.35)$$

Für die Rotorgleichung wird:

$$0 = R'_R \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{I}'_{Rg} \cdot e^{-j(\dots)} + js\omega_S \left[ L_{Sh} \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{I}'_{Sg} \cdot e^{-j(\dots)} + (L_{Sh} + L_{S\sigma}) \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{I}'_{Rg} \cdot e^{-j(\dots)} \right] + \sqrt{\frac{3}{2}} L_{Sh} \cdot \underline{I}'_{Sg} \cdot e^{-j(\dots)} \cdot (-j2 \cdot \omega_S) + (L_{Sh} + L_{S\sigma}) \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{I}'_{Rg} \cdot e^{-j(\dots)} \cdot (-j2 \cdot \omega_S) \quad (12.36)$$

Zusammengefaßt

$$0 = R'_R \cdot \underline{I}'_{Rg} - js \cdot \omega_S \cdot L_{Sh} \cdot \underline{I}_{Sg} - js \cdot \omega_S \cdot (L_{Sh} + L_{S\sigma}) \cdot \underline{I}'_{Rg} + j2 \cdot \omega_S \cdot L_{Sh} \cdot \underline{I}_{Sg} - j2 \cdot \omega_S \cdot (L_{Sh} + L_{S\sigma}) \cdot \underline{I}'_{Rg}$$

$$0 = R'_R \cdot \underline{I}'_{Rg} + j(2-s) \cdot \omega_S \cdot L_{S\sigma} \cdot \underline{I}'_{Rg} + j(2-s) \cdot L_{Sh} \cdot (\underline{I}_{Sg} + \underline{I}'_{Rg})$$

Division durch  $2-s$ , damit überall die gleiche Frequenz auftritt. Dann wird:

$$0 = \left( \frac{R'_R}{2-s} + j\omega_S \cdot L'_{R\sigma} \right) \cdot \underline{I}'_{Rg} + j \cdot L_{Sh} \cdot \underbrace{(\underline{I}_{Sg} + \underline{I}'_{Rg})}_{\underline{I}_{\mu g}}$$

$$\underline{U}_{Sg} = (R_S + j\omega_S L_{S\sigma}) \underline{I}_{Sg} + j\omega_S L_{Sh} \cdot \underline{I}_{\mu g} \quad (12.37)$$

$$0 = \left( \frac{1}{2-s} R'_R + j\omega_S L'_{R\sigma} \right) \underline{I}'_{Rg} + j\omega_S L_{Sh} \cdot \underline{I}_{\mu g} \quad (12.38)$$

$$\underline{I}_{\mu g} = \underline{I}_{Sg} + \underline{I}'_{Rg} \quad (12.39)$$

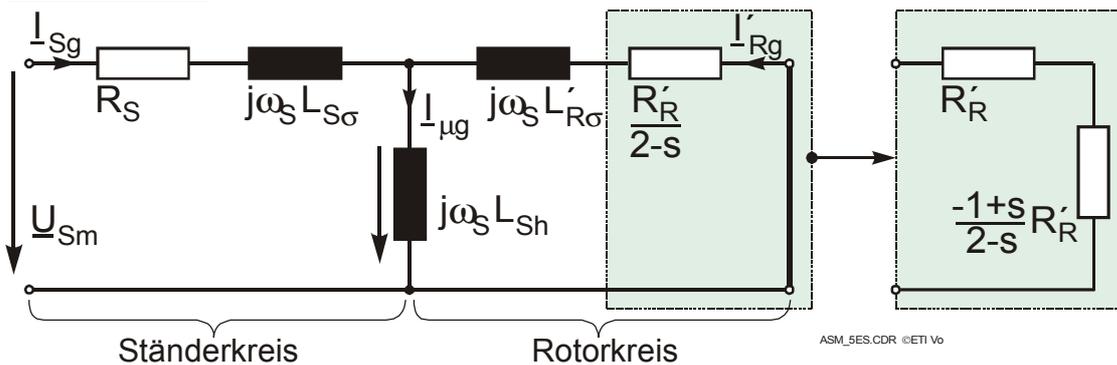


Bild 12.8: Ersatzschaltbild für die Gegenkomponente

Auch bei der Gegenkomponente läßt sich der Faktor beim Rotorwiderstand zerlegen:

$$\frac{1+2-s}{2-s} = 1 + \frac{-1+s}{2-s} \quad (12.40)$$

Die einzige Veränderung gegenüber dem Ersatzschaltbild der Mitkomponente ist der Faktor beim Rotorwiderstand.

### 12.3.3 Anteil des Nullsystems

Das Nullsystem ist von den beiden anderen Gleichungen entkoppelt. Die Ansätze

$$u_{S0} = \sqrt{6} \cdot \operatorname{Re}\{\underline{U}_{S0} \cdot e^{j\omega_s t}\} \quad ; \quad i_{S0} = \sqrt{6} \cdot \operatorname{Re}\{\underline{I}_{S0} \cdot e^{j\omega_s t}\}$$

führen mit der 3. Gleichung zu:

$$\sqrt{6} \cdot \operatorname{Re}\{\underline{U}_{S0} \cdot e^{j\omega_s t}\} = R_S \cdot \sqrt{6} \cdot \operatorname{Re}\{\underline{I}_{S0} \cdot e^{j\omega_s t}\} + L_{S\sigma} \cdot \sqrt{6} \cdot \operatorname{Re}\{\underline{I}_{S0} \cdot e^{j\omega_s t}\}$$

Realteil beseitigt:

$$\underline{U}_{S0} = (R_S + j\omega_s \cdot L_{S\sigma}) \cdot \underline{I}_{S0} \quad (12.41)$$

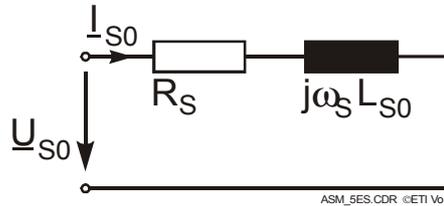


Bild 12.9: Ersatzschaltung der Nullkomponente

Bei der Grundwellenmaschine beeinflusst ein vorhandener Nullstrom weder das Luftspaltfeld noch das innere Drehmoment.

### 12.3.4 Superposition der drei Systeme

Aus den beiden Gleichungspaaren können die Zeiger  $\underline{I}_{Sm}$ ,  $\underline{I}'_{Rm}$ ,  $\underline{I}_{Sg}$  und  $\underline{I}'_{Rg}$  berechnet werden. Die resultierenden Stromraumzeiger sind dann:

$$\underline{i}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \underline{I}_{Sm} + \underline{I}_{Sg}^* e^{-j2\omega_s t} \right) e^{j\gamma_{S0}} \quad (12.42)$$

$$\underline{i}'_{R1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \underline{I}'_{Rm} + \underline{I}'_{Rg}^* e^{-j2\omega_s t} \right) e^{j\gamma_{S0}} \quad (12.43)$$

Das innere Drehmoment berechnet sich nach der bekannten Gleichung zu:

$$M_i = 2p \cdot L_{Sh} \cdot \operatorname{Im}\{\underline{i}_{S1} \cdot \underline{i}'_{R1}^*\} \quad (12.44)$$

$$M_i = 2 \cdot p \cdot L_{Sh} \cdot \frac{3}{2} \cdot \operatorname{Im}\left\{ \left( \underline{I}_{Sm} + \underline{I}_{Sg}^* \cdot e^{-j2\omega_s t} \right) e^{j\gamma_{S0}} \cdot e^{-j\gamma_{S0}} \left( \underline{I}'_{Rm} + \underline{I}'_{Rg} \cdot e^{j2\omega_s t} \right) \right\}$$

$$M_i = 3 \cdot p \cdot L_{Sh} \cdot \operatorname{Im}\left\{ \underline{I}_{Sm} \cdot \underline{I}'_{Rm} + \underline{I}_{Sg}^* \cdot \underline{I}'_{Rg} + \underline{I}_{Sm} \cdot \underline{I}'_{Rg} \cdot e^{j2\omega_s t} + \underline{I}_{Sg}^* \cdot \underline{I}'_{Rm} \cdot e^{-j2\omega_s t} \right\} \quad (12.45)$$

Die ersten beiden Ausdrücke ergeben das konstante Drehmoment von Mit- und Gegensystem.

Der dritte und vierte Ausdruck stellen mit  $2 \cdot \omega_s$  sinusförmig sich veränderliche Pendelmomente dar, die nur Verluste und Geräusche verursachen und nichts zum mittleren Drehmoment beitragen.

Im folgenden werden daher nur die Mittelwerte, d.h. nur die ersten beiden Ausdrücke, berücksichtigt.

$$\underline{M}_i = 3 \cdot p \cdot L_{Sh} \cdot \operatorname{Im}\left\{ \underline{I}_{Sm} \cdot \underline{I}'_{Rm} + \underline{I}'_{Rm} \cdot \underline{I}_{Sg}^* \right\} \quad (12.46)$$

Aus dem Ersatzschaltbild kann man die Momente mit Hilfe der Rotorströme ausdrücken.

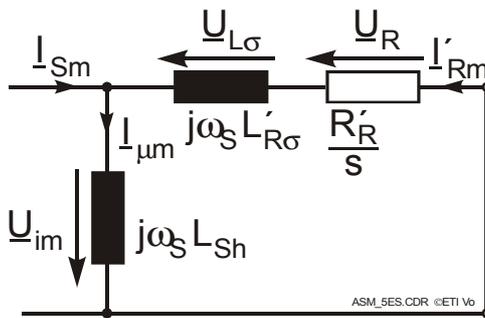


Bild 12.10: Teil-Ersatzschaltbild des Rotorkreises

### 12.3.5 Moment des Mitsystems

$$M_i = 3 \cdot p \cdot L_{Sh} \cdot \text{Im} \left\{ \left( \underline{I}_{\mu m} - \underline{I}'_{Rm} \right) \cdot \underline{I}'_{Rm} \right\}$$

Mit  $\underline{U}_{im} = j\omega_S \cdot L_{Sh} \cdot \underline{I}_{\mu m}$  wird daraus

$$M_{im} = 3 \cdot p \cdot L_{Sh} \cdot \text{Im} \left\{ \frac{\underline{U}_{im}}{j\omega_S \cdot L_{Sh}} \cdot \underline{I}'_{Rm} - \underline{I}'_{Rm} \cdot \underline{I}'_{Rm} \right\} = \frac{3 \cdot p}{\omega_S} \cdot \text{Im} \left\{ -j \cdot \underline{U}_{im} \cdot \underline{I}'_{Rm} \right\}$$

wegen  $\text{Im} \left\{ -j \cdot (a + j \cdot b) \right\} = \text{Im} \left\{ -j \cdot a + b \right\} = -\text{Re} \left\{ a + j \cdot b \right\}$  wird für das Drehmoment

$$\boxed{M_{im} = -\frac{3 \cdot p}{\omega_S} \cdot \text{Re} \left\{ \underline{U}_{im} \cdot \underline{I}'_{Rm} \right\}} \quad (12.47)$$

Aus der Ersatzschaltung kann man ablesen, dass sich die Spannung  $\underline{U}_i$  aus den Anteilen an Streuung und Rotorwiderstand zusammensetzt.

$$\underline{U}_{im} = j\omega_S \cdot L_{Sh} \cdot \underline{I}_{\mu m} = -\underline{U}_{L\sigma} - \underline{U}_R = -j\omega_S \cdot L'_{R\sigma} \cdot \underline{I}'_{Rm} - \frac{R'_R}{s} \cdot \underline{I}'_{Rm}$$

Eingesetzt in die Drehmomentengleichung:

$$M_i = -\frac{3 \cdot p}{\omega_S} \cdot \text{Re} \left\{ -j \cdot \omega_S \cdot L'_{R\sigma} \cdot \underline{I}'_{Rm} \cdot \underline{I}'_{Rm} - \frac{R'_R}{s} \cdot \underline{I}'_{Rm} \cdot \underline{I}'_{Rm} \right\} \quad (12.48)$$

$$\boxed{M_{im} = \frac{3}{\Omega_S} \cdot \frac{R'_R}{s} \cdot I'^2_{Rm}} \quad (12.49)$$

### 12.3.6 Drehmoment des Gegensystems

Es ist für das Drehmoment

$$M_{ig} = 3 \cdot p \cdot L_{Sh} \cdot \text{Im} \left\{ \underline{I}'_{Sg} \cdot \underline{I}'_{Rg} \right\} \quad \text{und} \quad \underline{I}_{\mu g} = \underline{I}'_{Sg} + \underline{I}'_{Rg}$$

Die innere Spannung des Gegensystems  $\underline{U}_{ig} = j\omega_S \cdot L_{Sh} \cdot \underline{I}_{\mu g}$  eingesetzt

$$M_{ig} = 3 \cdot p \cdot L_{Sh} \cdot \text{Im} \left\{ \left( \underline{I}'_{\mu g} - \underline{I}'_{Rg} \right) \cdot \underline{I}'_{Rg} \right\} = 3 \cdot p \cdot L_{Sh} \cdot \text{Im} \left\{ \underline{I}'_{\mu g} \cdot \underline{I}'_{Rg} - \underline{I}'_{Rg} \cdot \underline{I}'_{Rg} \right\}$$

$$M_{ig} = 3 \cdot p \cdot L_{Sh} \cdot \text{Im} \left\{ \frac{\underline{U}_{ig}}{-j\omega_S \cdot L_{Sh}} \cdot \underline{I}'_{Rg} \right\} \quad (12.50)$$

$$\underline{U}_{ig} = j\omega_S \cdot L_{Sh} \cdot \underline{I}_{\mu g} = -j\omega_S \cdot L'_{R\sigma} \cdot \underline{I}'_{Rg} - \frac{R'_R}{2-s} \cdot \underline{I}'_{Rg} \quad (12.51)$$

Eingesetzt:

$$M_{ig} = \frac{3 \cdot p}{\omega_S} \cdot \operatorname{Im} \left\{ \underbrace{\frac{j \cdot \omega_S \cdot L'_{R\sigma} \cdot \underline{I}'_{Rg}^* \cdot \underline{I}'_{Rg}}{j}}_{\text{reell}} + \frac{R'_R}{(2-s)j} \cdot \underbrace{\underline{I}'_{Rg}^* \cdot \underline{I}'_{Rg}}_{\text{reell}} \right\} \quad (12.52)$$

$$M_{ig} = -\frac{3 \cdot p}{\omega_S} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \underline{I}'_{Rg}^* \cdot \underline{I}'_{Rg} \right\} \cdot \frac{R'_R}{2-s} = -\frac{p}{\omega_S} \cdot 3 \cdot \frac{R'_R}{2-s} \cdot I_{Rg}^2$$

$$\boxed{M_{ig} = -\frac{p}{\omega_S} \cdot 3 \cdot \frac{R'_R}{2-s} \cdot I_{Rg}^2} \quad (12.53)$$

## 12.4 Ständerleistung der ASM:

Für die dem Ständer einer Drehstrommaschine zugeführte el. Leistung gilt nach der Definition mit den Raumzeigern:

$$P_{el} = (\underline{i})^T (\underline{u}) = (\underline{i}_{S1}, \underline{i}_{S1}^*, \underline{i}_{S0})^* \begin{pmatrix} \underline{u}_{S1} \\ \underline{u}_{S1}^* \\ \underline{u}_{S0} \end{pmatrix} = \underbrace{\underline{u}_{S1} \cdot \underline{i}_{S1}^*}_x + \underbrace{\underline{u}_{S1}^* \cdot \underline{i}_{S1}}_{x^*} + \underline{u}_{S0} \cdot \underline{i}_{S0}$$

$$\boxed{P_{el} = 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \underline{u}_{S1} \cdot \underline{i}_{S1}^* \right\} + \underline{u}_{S0} \cdot \underline{i}_{S0}} \quad (12.54)$$

Die Raumzeiger von Spannung und Strom in symmetrischen Komponenten ausgedrückt, wobei die Nullkomponente nicht weiter berücksichtigt wird:

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \left\{ \underline{U}_{Sm} + \underline{U}_{Sg}^* \cdot e^{j2\omega_S t} \right\} \quad \text{und} \quad \underline{i}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \left\{ \underline{I}_{Sm} + \underline{I}_{Sg}^* \cdot e^{-j2\omega_S t} \right\}$$

$$P_{el} = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \begin{aligned} &\underline{U}_{Sm} \cdot \underline{I}_{Sm}^* + \underline{U}_{Sm} \cdot \underline{I}_{Sg} \cdot e^{j2\omega_S t} \\ &+ \underline{U}_{Sg}^* \cdot e^{-j2\omega_S t} \cdot \underline{I}_{Sm} + \underline{U}_{Sg}^* \cdot e^{-j2\omega_S t} \cdot \underline{I}_{Sg} \cdot e^{+j2\omega_S t} \end{aligned} \right\} \quad (12.55)$$

Auch hier treten wieder Pendelleistungen mit der doppelten Frequenz auf. Deshalb werden im Folgenden nur die Mittelwerte des Drehmoments betrachtet.

$$\overline{P_{el}} = 3 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \underline{U}_{Sm} \cdot \underline{I}_{Sm}^* + \underline{U}_{Sg}^* \cdot \underline{I}_{Sg} \right\}$$

Aufspaltung der Leistungen:

$$\underline{U}_{Sm} = R_S \cdot \underline{I}_{Sm} + j\omega \cdot L_{S\sigma} \cdot \underline{I}_{Sm} + \underline{U}_{im}$$

$$\underline{U}_{Sg} = R_S \cdot \underline{I}_{Sg} + j\omega \cdot L_{S\sigma} \cdot \underline{I}_{Sg} + \underline{U}_{ig}$$

Nach dem Einsetzen ergeben sich folgende Produkte:

$$R_S \cdot \underline{I}_{Sm} \cdot \underline{I}_{Sm}^* + j\omega \cdot L_{S\sigma} \cdot \underline{I}_{S} \cdot \underline{I}_{S}^* + \underline{U}_{im} \cdot \underline{I}_{Sm}^* \quad \text{Mitsystem} \quad (12.56)$$

$$R_S \cdot \underline{I}_{Sg} \cdot \underline{I}_{Sg} - j\omega \cdot L_{S\sigma} \cdot \underline{I}_{Sg} \cdot \underline{I}_{Sg}^* + \underline{U}_{ig} \cdot \underline{I}_{Sg} \quad \text{Gegensystem} \quad (12.57)$$

Der erste Term stellt die Verlustleistung im Ständer dar.

Der zweite Term ist die Blindleistung, die die Ständerstreuung benötigt.

Der dritte Term ist die über das Drehfeld übertragene Drehfeldleistung.

Deshalb kann man für die mittlere Leistung schreiben:

$$P_{el} = 3 \cdot P_{VS} + j \cdot 3 \cdot Q_{S\sigma} + 3 \cdot P_D \quad \text{oder}$$

$$P_{el} = 3 \cdot R_S \cdot (I_{Sm}^2 + I_{Sg}^2) + j\omega \cdot L_{S\sigma} \cdot (I_{Sm}^2 - I_{Sg}^2) + 3 \cdot \text{Re} \{ \underline{U}_{im} \cdot \underline{I}_{Sm}^* + \underline{U}_{ig}^* \cdot \underline{I}_{Sg} \} \quad (12.58)$$

Für die weitere Aufspaltung der Drehfeldleistung wird die innere Spannung betrachtet:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \text{Re} \{ \underline{U}_{im} \cdot \underline{I}_{Sm}^* \} &= 3 \cdot \text{Re} \{ +j\omega_S \cdot L_{S\sigma} \cdot (\underline{I}'_{Rm} + \underline{I}_{Sm}) \cdot \underline{I}_{Sm}^* \} \\ &= 3 \cdot \text{Re} \left\{ j\omega_S \cdot L_{Sh} \cdot \underbrace{\underline{I}'_{Rm} \cdot \underline{I}_{Sm}^*}_{a+jb} + j\omega_S \cdot L_{Sh} \cdot \underbrace{\underline{I}_{Sm} \cdot \underline{I}_{Sm}^*}_{\text{reell}} \right\} \\ &= -3 \cdot \omega_S \cdot L_{Sh} \cdot \text{Im} \{ \underline{I}'_{Rm} \cdot \underline{I}_{Sm}^* \} = 3 \cdot \omega_S \cdot L_{Sh} \cdot \text{Im} \{ \underline{I}_{Sm}^* \cdot \underline{I}'_{Rm} \} \end{aligned}$$

oder

$$3 \cdot \text{Re} \{ \underline{U}_{im} \cdot \underline{I}_{Sm}^* \} = 3 \cdot \omega_S \cdot L_{Sh} \cdot \text{Im} \{ \underline{I}_{Sm}^* \cdot \underline{I}'_{Rm} \}$$

Wegen des Drehmoments des Mitsystems wird

$$M_i = 3 \cdot p \cdot L_{Sh} \cdot \text{Im} \{ \underline{I}_{Sm}^* \cdot \underline{I}'_{Rm} \}$$

$$\boxed{3 \cdot \text{Re} \{ \underline{U}_{im} \cdot \underline{I}_{Sm}^* \} = \frac{\omega_S}{p} \cdot M_{im} = \Omega_S \cdot M_{im} = P_{sm}} \quad (12.59)$$

Für den zweiten Ausdruck der Drehfeldleistung des Gegensystems erhält man entsprechend:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \text{Re} \{ \underline{U}_{ig}^* \cdot \underline{I}_{Sg} \} &= 3 \cdot \text{Re} \{ -j\omega \cdot L_{Sh} \cdot (\underline{I}_{Sg}^* + \underline{I}'_{Rg}) \cdot \underline{I}_{Sg} \} \\ &= 3 \cdot \text{Re} \left\{ -j\omega_S \cdot L_{S\sigma} \cdot \underbrace{\underline{I}_{Sg}^* \cdot \underline{I}_{Sg}}_{\text{reell}} - j\omega \cdot L_{S\sigma} \cdot \underbrace{\underline{I}'_{Rg} \cdot \underline{I}_{Sg}}_{-j(a+jb)=-ja+b} \right\} \\ &= 3 \cdot \text{Im} \left\{ \omega_S \cdot L_{Sh} \cdot \underbrace{\underline{I}'_{Rg} \cdot \underline{I}_{Sg}}_{(-1)(a+jb)=-a-jb} \right\} = -3 \cdot \omega_S \cdot L_{Sh} \cdot \frac{p}{p} \cdot \text{Im} \{ \underline{I}_{Sg}^* \cdot \underline{I}'_{Rg} \} \end{aligned} \quad (12.60)$$

Wodurch für das Drehmoment des Gegensystems gilt.

$$M_i = 3 \cdot p \cdot L_{Sh} \cdot \text{Im} \{ \underline{I}_{Sg}^* \cdot \underline{I}'_{Rg} \} \quad (12.61)$$

$$\boxed{3 \cdot \text{Re} \{ \underline{U}_{ig}^* \cdot \underline{I}_{Sg} \} = -\frac{\omega_S}{p} \cdot M_{ig} = P_{Sg}} \quad (12.62)$$

Damit ist die dem Ständer zugeführte Leistung:

$$P_{el} = 3 \cdot R_S \cdot (I_{Sm}^2 + I_{Sg}^2) + j\omega \cdot L_{S\sigma} \cdot (I_{Sm}^2 - I_{Sg}^2) \cdot 3 + P_{Sm} + P_{Sg} \quad (12.63)$$

$$P_{el} = 3 \cdot R_S \cdot (I_{Sm}^2 + I_{Sg}^2) + j\omega \cdot L_{S\sigma} \cdot (I_{Sm}^2 + I_{Sg}^2) \cdot 3 + \frac{\omega_S}{p} \cdot (M_{im} - M_{ig}) \quad (12.64)$$

Ständerverluste      Ständerblindleistung      Drehfeldleistung

### 12.4.1 Leistungsbilanz

$$\left( \begin{array}{l} 3 \cdot \frac{R_R}{s} \cdot I_{Rm}^2 = \frac{\omega_s}{p} \cdot M_{im} = \Omega \cdot M_{im} = P_{Dm} \\ 3 \cdot \frac{R_R}{2-s} \cdot I_{Rg}^2 = -\frac{\omega_s}{p} \cdot M_{ig} = -\Omega \cdot M_{ig} = P_{Dg} \end{array} \right) \text{ Def. von vorher}$$

Die dem Rotor über die Drehfeldleistung von Mit- und Gegensystem zugeführte Leistung muß sich in die mechanische Leistung und die Rotorverlustleistung aufteilen.

$$P_{mech} + P_{VR} = P_{Sm} + P_{Sg} \quad (12.65)$$

$$\overline{M}_{il} \cdot \frac{\dot{\gamma}}{p} + P_{VR} = P_{sm} + P_{sg} \quad \text{oder mit} \quad \frac{\dot{\gamma}}{p} = \Omega$$

$$\boxed{(M_{im} + M_{ig}) \cdot \Omega + P_{VR} = \Omega_s (M_{im} - M_{ig})} \quad (12.66)$$

$$\begin{aligned} P_{VR} &= M_{im} \cdot (\Omega_s - \Omega) + M_{ig} \cdot (-\Omega_s - \Omega) \\ &= M_{im} \cdot \Omega_s \left( \frac{\Omega_s - \Omega}{\Omega_s} \right) - \Omega_s \cdot M_{ig} \left( \frac{\Omega_s + \Omega}{\Omega_s} \right) \end{aligned} \quad (12.67)$$

$$P_{VR} = P_{sm} \cdot s - \Omega_s \cdot M_{ig} \cdot \left( 1 + \frac{\Omega}{\Omega_s} \right)$$

wegen  $s = \frac{\Omega_s - \Omega}{\Omega_s} = 1 - \frac{\Omega}{\Omega_s} \rightarrow \frac{\Omega}{\Omega_s} = 1 - s$  wird  $P_{VR} = P_{sm} \cdot s + P_{sg} (1 + 1 - s)$  oder

$$\boxed{P_{VR} = P_{Dm} \cdot s + P_{Dg} \cdot (2 - s)} \quad (\text{beide Ausdrücke immer } > 0 ! ) \quad (12.68)$$

$$\boxed{P_{VR} = 3 \cdot R_R \cdot (I_{Rm}^2 + I_{Rg}^2)} \quad (12.69)$$

Über den Luftspalt wird im zeitlichen Mittel vom Ständer auf den Rotor die Leistung

$$P_S = P_{Sm} + P_{Sg} = \Omega_s \cdot (M_{im} - M_{ig}) \quad \text{übertragen.} \quad (12.70)$$

$$(M_{im} + M_{ig}) \cdot \Omega + P_{Dm} \cdot s + P_{Dg} \cdot (2 - s) = P_{Dm} + P_{Dg} \quad \text{oder}$$

$$\begin{aligned} (M_{im} + M_{ig}) \cdot \Omega &= P_{mech} = P_{Dm} \cdot (1 - s) + P_{Dg} \cdot (1 - 2 + s) \\ &= P_{Dm} \cdot (1 - s) - P_{Dg} \cdot (1 - s) \end{aligned} \quad (12.71)$$

$$\boxed{P_{mech} = (1 - s) \cdot (P_{Sm} - P_{Sg})} \quad (12.72)$$

## 12.5 Herleitung Kloss'sche Formel

Die Kennlinien  $M_{im}(s)$  und  $M_{ig}(s)$  kann man nach obigen Formeln und den Ersatzschaltbildern berechnen. Ohne weitere Herleitung werden die Gleichungen hier direkt angegeben. Sie ergeben sich unter den Annahmen

$$\frac{R_S}{\omega_S L_{Sh}} \ll 1 \quad ; \quad \sigma_S \ll 1 \quad ; \quad \sigma_R \ll 1 \quad \text{zu:}$$

$$\boxed{\frac{M_{im}}{M_{mk}} = \frac{2 + \Delta}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s} + \Delta}} \quad \text{Mitsystem} \quad (12.73)$$

$$\text{mit} \quad \Delta = \frac{2s_k R_S}{(1 + \sigma_S)^2 R'_R}$$

$$\boxed{\frac{M_{ig}}{M_{gk}} = \frac{2 + \Delta}{\frac{2-s}{s_{kg}} + \frac{s_{kg}}{2-s} - \Delta}} \quad \text{Gegensystem} \quad (12.74)$$

$$s_{kg} = -s_k$$

linksdrehend siehe bei OS

Die Kippmomente sind dabei:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{mK} = \frac{p}{\omega_S} \cdot \frac{3}{2} \frac{U_{Sm}^2}{Z_K} \\ M_{gK} = \frac{p}{\omega_S} \cdot \frac{3}{2} \frac{U_{Sg}^2}{Z_K} \end{array} \right. \quad Z_K = R_S + \sqrt{\omega_S^2 (L_{S\sigma} + L'_{R\sigma})^2 + R_S^2} \quad (12.75)$$

$$s_K = \frac{R'_R}{\sqrt{\omega_S^2 (L_{S\sigma} + L'_{R\sigma})^2 + R_S^2}} \quad s_{kg} = -s_k \quad (12.76)$$

$M_{mK}$  und  $M_{gK}$  sind die *motorischen* Kippmomente, die bei  $s_K$  bzw.  $2 - s_K$  auftreten; die bei  $-s_K$  bzw.  $2 + s_K$  auftretenden generatorischen Kippmomente sind betragsmäßig größer, wenn man  $R_S$  nicht vernachlässigt ( $\Delta \neq 0$ ):

$$M_{im}(-s_K) = -\frac{2 + \Delta}{2 - \Delta} M_{mK} \quad ; \quad M_{ig}(2 + s_K) = -\frac{2 + \Delta}{2 - \Delta} M_{gK}$$

Das folgende Diagramm (Bild 12.11) zeigt den Verlauf der Drehmomente für die Daten:

$$s_K = 0,16; \quad \Delta = 0,42; \quad (U_{Sm} / U_{Sg})^2 = 3; \quad \begin{array}{l} M_{im}(-s_K) = -1,53M_{mK} \\ M_{ig}(2 + s_K) = -1,53M_{gK} \end{array}$$

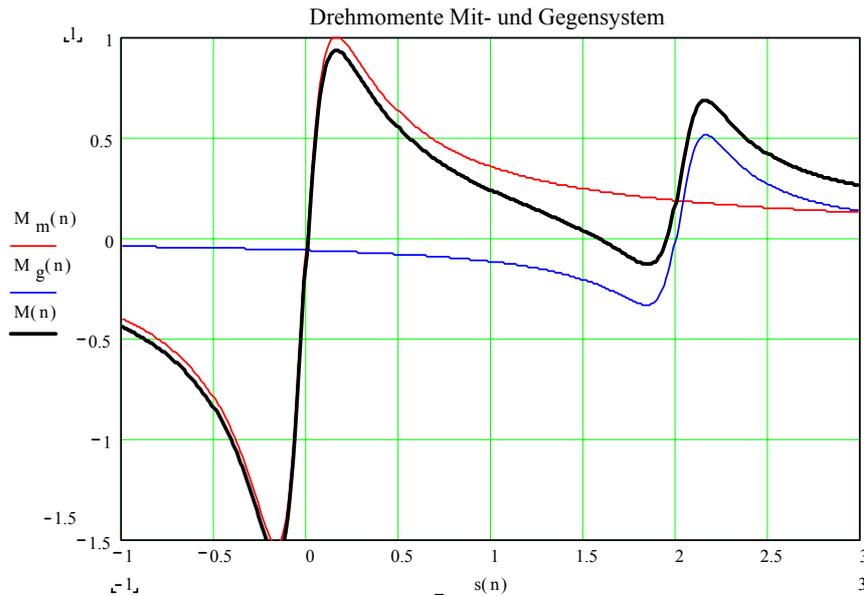


Bild 12.11: Drehmomentverlauf über dem Schlupf für Mit- und Gegensystem.

Die Maschine würde im vom Mitsystem bestimmten Drehsinn anlaufen, jedoch mit einem durch das Gegensystem reduzierten Anzugsmoment. Im Fall  $U_{Sm} = U_{Sg}$  wäre das Anzugsmoment  $\bar{M}_i(s=1) = 0$ . Zu beachten ist bei unsymmetrischer Speisung neben der Momentenkennlinie auch die Erhöhung der Stromwärmeverluste; allgemein gilt:

$$P_{vS} = 3R_S (I_{Sm}^2 + I_{Sg}^2 + I_{S0}^2),$$

$$P_{vR} = 3R'_R (I_{Rm}^2 + I_{Rg}^2) = \underbrace{s \frac{\omega_S}{p} M_{im}}_1 + \underbrace{(2-s) \frac{\omega_S}{p} M_{ig}}_{5,98} \quad (12.77)$$

Zu obigem Beispiel bei  $s = 0,04$ :

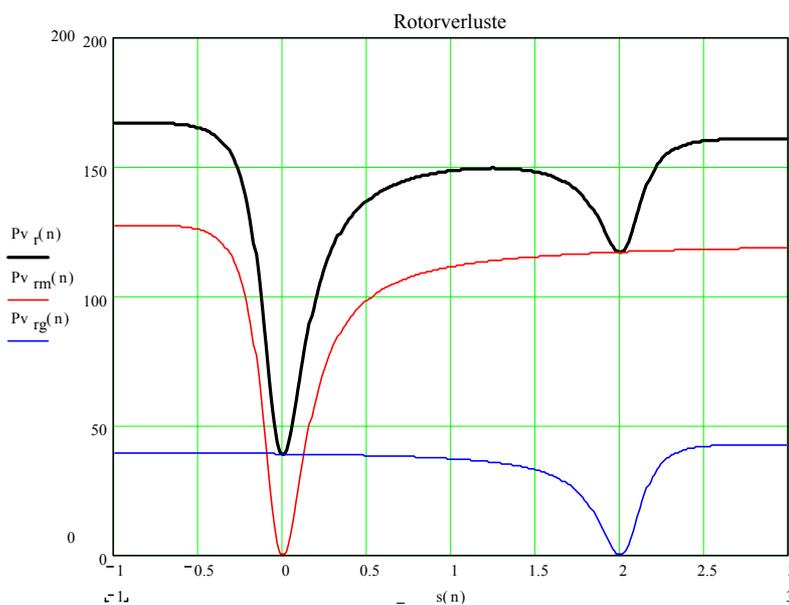


Bild 12.12: Rotorverluste über dem Schlupf für Mit- und Gegensystem.

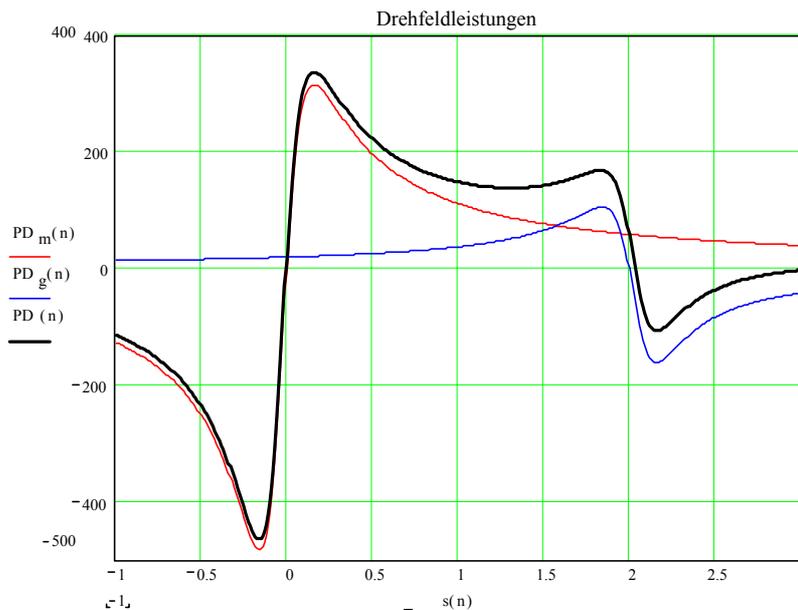


Bild 12.13: Drehfeldleistungen über dem Schlupf für Mit- und Gegensystem.

## 12.6 Beispiel zu den symmetrischen Komponenten

In den folgenden zwei Beispielen wird die Zerlegung in symmetrische Komponentennam Einphasenmotor und beim Ausfall einer Phase gezeigt.

### 12.6.1 Einphasenmotor

Einphasenmotoren haben im Stator nur einen Strang, der direkt an die Wechselspannung angeschlossen ist. Für den Anlauf ist eine zweite Wicklung vorhanden, die orthogonal zu der ersten Wicklung liegt. Diese Hilfswicklung wird über einen Kondensator an die gleiche Spannung angeschlossen ist. Die zweite Wicklung hat in der Regel mehr Windungen als die Hauptwicklung und ist daher hochohmiger als diese. Beim Einschalten entsteht ein elliptisches Drehfeld, das ein beschleunigendes Drehmoment erzeugt. Während des Betriebs hat die Hilfswicklung eine nur untergeordnete Funktion. Ohne Hilfswicklung würde nur ein Wechselfeld entstehen.

Bedingungen aus der Schaltung:

$$\underline{U}_{S1} = U_{S1}$$

$$\underline{I}_{S2} = \underline{I}_{S3} = 0$$

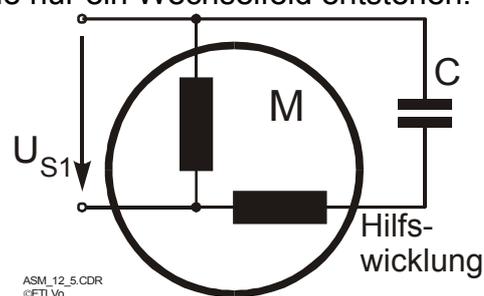


Bild 12.14: Schaltung eines Einphasenmotors.

Aus den Bedingungen der Schaltung folgt nach der Definition der Ströme für das Mit- und Gegensystem:

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_{Sm} \\ \underline{I}_{Sg} \\ \underline{I}_{S0} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12.78}$$

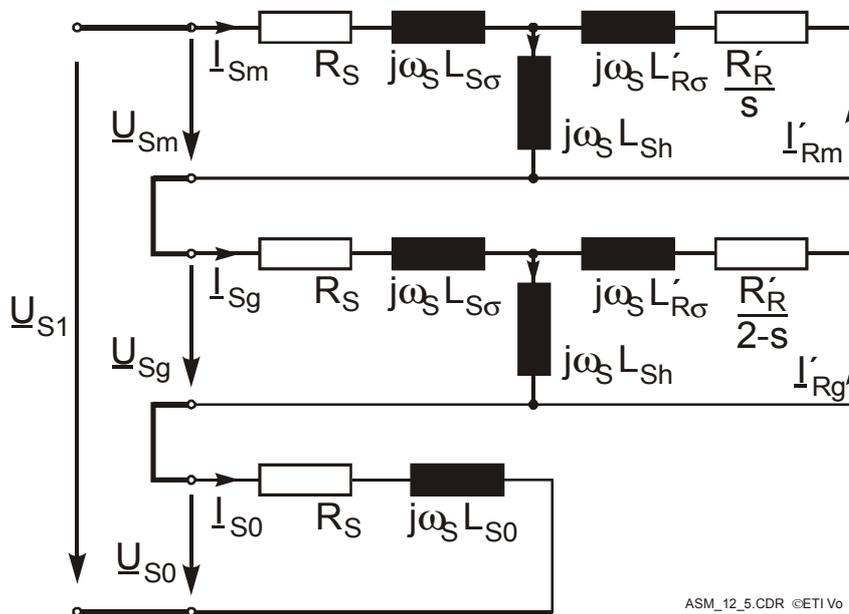
für die symmetrischen Komponenten der Ströme:

$$\underline{I}_{Sm} = \underline{I}_{Sg} = \underline{I}_{S0} = \frac{1}{3} \cdot \underline{I}_R \quad (12.79)$$

Für die symmetrischen Komponenten der Spannung gilt nach Gl.(xx)

$$\underline{U}_{Sm} + \underline{U}_{Sg} + \underline{U}_{S0} = \underline{U}_R = U_R \quad (12.80)$$

Die Bedingungen aus der Schaltung schreiben daher vor, wie die Ersatzschaltbilder von Mit-, Gegen- und Nullsystem miteinander zu verschalten sind. Man erhält die in Bild 12.15 dargestellte Ersatzschaltung. Aus dieser Ersatzschaltung kann nun bei beliebigem Schlupf  $s$  die Spannungsaufteilung und die Ströme ermittelt werden. Dazu wird die komplexe Impedanz von jeder Teil-Ersatzschaltung ermittelt und zu der Gesamtimpedanz aufaddiert. Aus der konstanten Spannung  $U_{S1}$  kann dann der Gesamtstrom ermittelt werden. Über den Strom lassen sich dann die komplexen Teilspannungen  $U_{Sm}$ ;  $U_{Sg}$  und  $U_{S0}$  ermitteln.



ASM\_12\_5.CDR ©ETI Vö

Bild 12.15: Ersatzschaltbild für Mit- und Gegensystem beim Einphasenmotor.

Mit Hilfe der Stromteilerformel kann die Stromaufteilung des Statorstromes auf Magnetisierungsstrom und Rotorstrom ermittelt werden. Mit dieser Aufteilung ergibt sich dann nach Gl.(xx) das Drehmoment.

Für die Darstellung der prinzipiellen Kurven wurden folgende bezogene Parameter verwendet.

$L_{Sh} = 0,055$	$L_{S\sigma} = 0,03 \cdot L_{Sh}$	$L'_{R\sigma} = 0,03 \cdot L_{Sh}$	$L_{S0} = 0,03 \cdot L_{S\sigma}$
$R_S = 0,12$	$R_S = 0,12$	$U_S = 10$	$f = 50 \text{ Hz}$
$-1 \leq s \leq 3$	$\Delta s = 0,01$	$p = 1$	

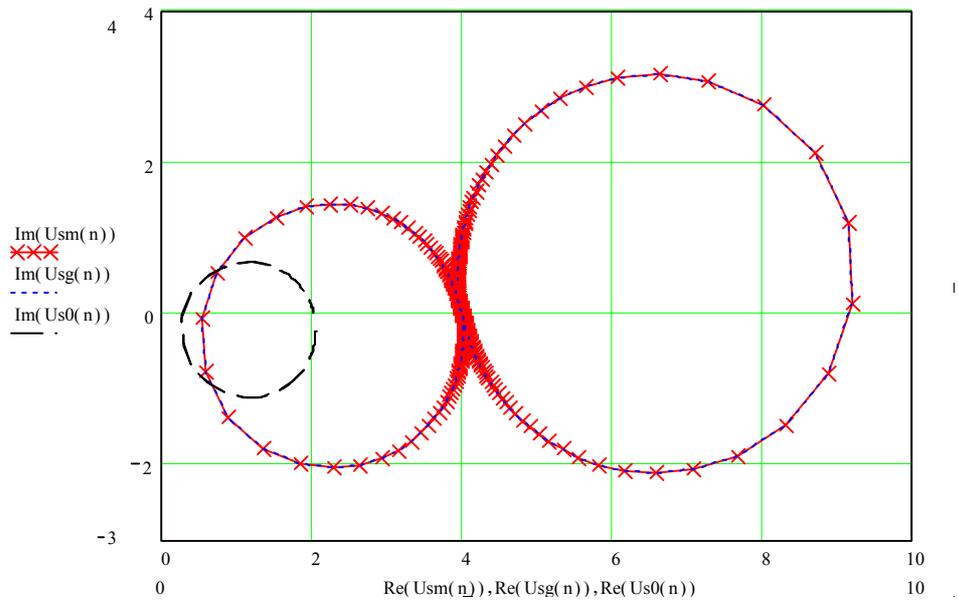


Bild 12.16: Einphasenmotor: Spannungszeiger der Mit-, Gegen- und Nullkomponente in der komplexen Ebene bei Veränderung des Schlupfes im Bereich  $s=\{-1\dots3\}$ ; Schrittweite der Schlupfänderung 0,01.

s	$\underline{U}_{Sm}$	$\underline{U}_{Sg}$	$\underline{U}_{S0}$	M
-1	$4 + j \cdot 0,411$	$4 - j \cdot 0,17$	$2 - j \cdot 0,241$	0
0	$9,2 + j \cdot 0,137$	$0,53 - j \cdot 0,08$	$0,269 - j \cdot 0,056$	
1	$4 + j \cdot 0,0026$	$4 + j \cdot 0,0026$	$2,024 - j \cdot 0,00536$	
2	$0,53 - j \cdot 0,08$	$9,2 + j \cdot 0,137$	$0,269 - j \cdot 0,056$	
3	$4 - j \cdot 0,17$	$4 + j \cdot 0,411$	$2 - j \cdot 0,241$	

Parametrierung der Ortskurve nach Bild 12.16:

Aus der Parametrierung der Ortskurve erkennt man, daß in Bild 12.16 drei Ortskurven enthalten sind. Die Ortskurven für Mit- und Gegenkomponente werden gegenläufig durchlaufen und liegen direkt aufeinander. An den Kreuzen in Bild 12.16 kann man die genauen Punkte bei den angegebenen Schlupfwerten ablesen. Der Zeiger der Nullkomponente durchläuft die Ortskurve ebenfalls zweimal.

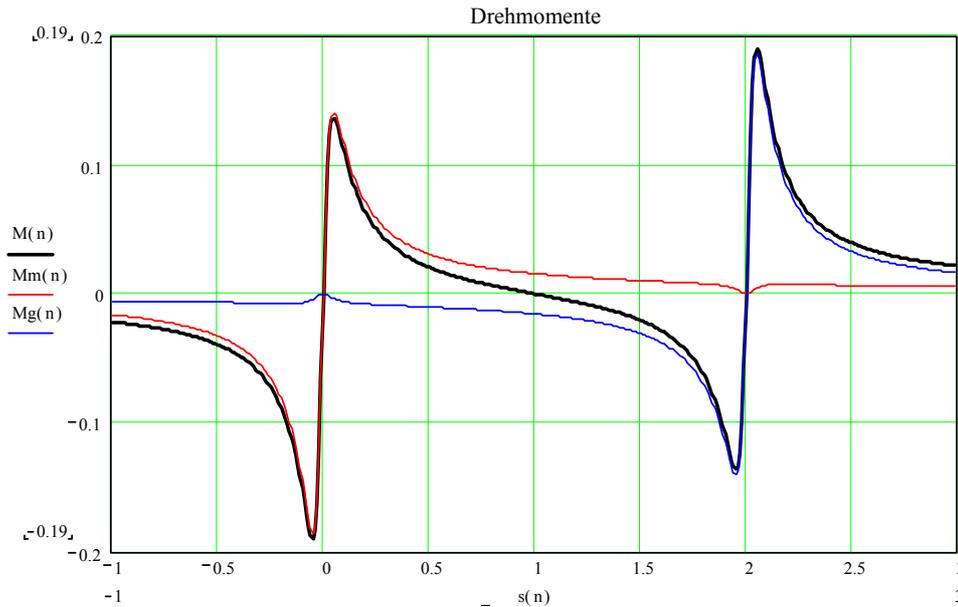


Bild 12.17: Einphasenmotor: Gesamtmoment und Drehmomente von Mit- und Gegensystem bei Veränderung des Schlupfes im Bereich  $s=\{-1\dots3\}$ ; Schrittweite der Schlupfänderung 0,01.

Die Drehmomente von Mit- und Gegensystem sind symmetrisch zum Schlupfwert  $s=1$  (Stillstand). Deshalb tritt beim Anlauf ohne Hilfswicklung kein Drehmoment auf. Die Maschine kann daher in positive oder negative Drehrichtung angeworfen werden und wird dann bei  $s=0$  (positive synchrone Drehzahl) oder bei  $s=2$  (negative synchrone Drehzahl) ihren stabilen Punkt einnehmen.

### 12.6.2 Unterbrechung eines Statorstranges

Bei der Unterbrechung eines Statorstranges hat man ähnliche Verhältnisse wie beim Einphasenmotor, weil bei nicht angeschlossenem Sternpunkt die beiden verbleibenden Wicklungen in Reihe geschaltet sind.

Bedingungen aus der Schaltung:

$$u_{S2} - u_{S3} = u_v \quad \text{oder} \quad \underline{U}_{S2} - \underline{U}_{S3} = \underline{U}_v$$

$$i_{S3} = -i_{S2} \quad \text{oder} \quad \underline{I}_{S3} = -\underline{I}_{S2}$$

$$i_{S1} = 0 \quad \text{oder} \quad \underline{I}_{S1} = 0$$

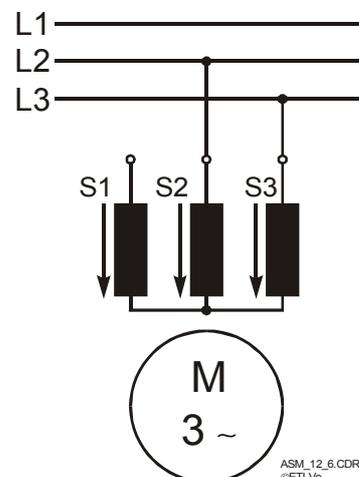


Bild 12.18: Schaltung bei der Unterbrechung des ersten Statorstranges bei Sternschaltung.

Nach der Definition folgt für die symmetrischen Komponenten der Ströme

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_{Sm} \\ \underline{I}_{Sg} \\ \underline{I}_{S0} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{I}_S \\ -\underline{I}_S \end{pmatrix} \quad (12.81)$$

oder daraus:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{Sm} &= \frac{1}{3} \cdot (a - a^2) \cdot \underline{I}_S = j \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \underline{I}_S \\ \underline{I}_{Sg} &= \frac{1}{3} \cdot (a^2 - a) \cdot \underline{I}_S = -j \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \underline{I}_S = -\underline{I}_{Sm} \end{aligned} \quad (12.82)$$

$$\underline{I}_{S0} = 0$$

Die symmetrischen Komponenten der Spannung müssen bestimmt werden. Dazu muß die unbekannte Spannung  $\underline{U}_{S1}$  aus den Gleichungen entfernt werden.

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_{Sm} \\ \underline{U}_{Sg} \\ \underline{U}_{S0} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{pmatrix} \quad (12.83)$$

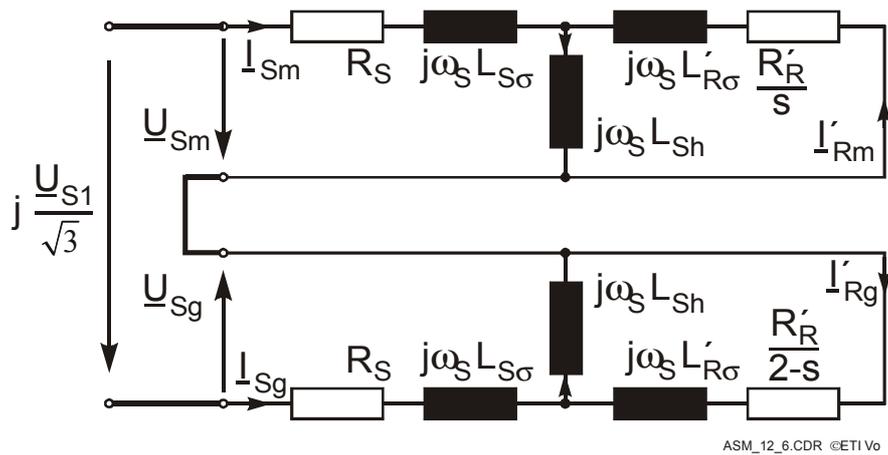
$$\begin{aligned} \underline{U}_{Sm} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_R + a \cdot \underline{U}_S + a^2 \cdot \underline{U}_T) \\ \underline{U}_{Sg} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_R + a^2 \cdot \underline{U}_S + a \cdot \underline{U}_T) \end{aligned} \quad (12.84)$$

Durch Subtraktion erhält man

$$\begin{aligned} \underline{U}_{Sm} - \underline{U}_{Sg} &= \frac{1}{3} \cdot (a - a^2) \cdot \underline{U}_S + \frac{1}{3} \cdot (a^2 - a) \cdot \underline{U}_T \\ &= \frac{1}{3} \cdot (a - a^2) \cdot (\underline{U}_S - \underline{U}_T) \\ &= j \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \underline{U}_v \end{aligned} \quad (12.85)$$

Wegen  $\underline{I}_{S0} = 0$  wird auch  $\underline{U}_{S0} = 0$

Für die Darstellung der prinzipiellen Kurven wurden die bezogene Parameter wie im vorhergegangenen Beispiel verwendet.



ASM\_12\_6.CDR ©ETI Vo

Bild 12.19: Ersatzschaltbild für Mit- und Gegensystem bei Unterbrechung eines Statorstranges.

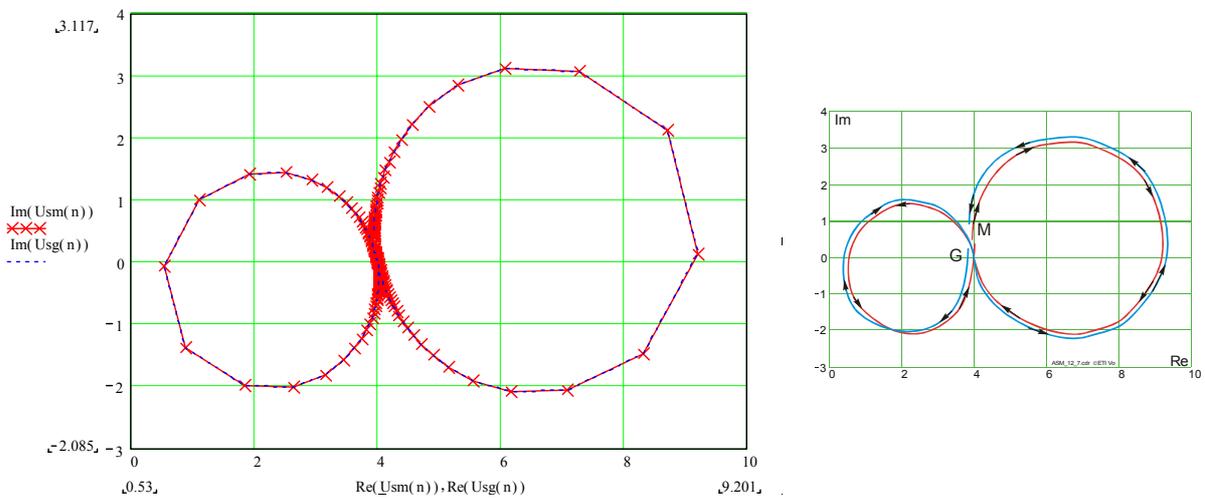


Bild 12.20: Ortskurven der Spannungsraumzeiger von Mit- und Gegensystem bei Unterbrechung eines Statorstranges  $s=\{-1 \dots 3\}$

Parametrierung der Spannungsraumzeiger

$U_{sg}(-100) = 3.996 - 0.061i$

$U_{sg}(0) = 0.53 - 0.079i$

$U_{sg}(100) = 9.201 + 0.137i$

$U_{sg}(200) = 3.954 + 0.264i$

$U_{sg}(300) = 3.963 + 0.184i$

$U_{sm}(-100) = 3.954 + 0.264i$

$U_{sm}(0) = 9.2 + 0.135i$

$U_{sm}(100) = 0.53 - 0.081i$

$U_{sm}(200) = 3.996 - 0.061i$

$U_{sm}(300) = 3.988 + 3.693i \cdot 10^{-3}$

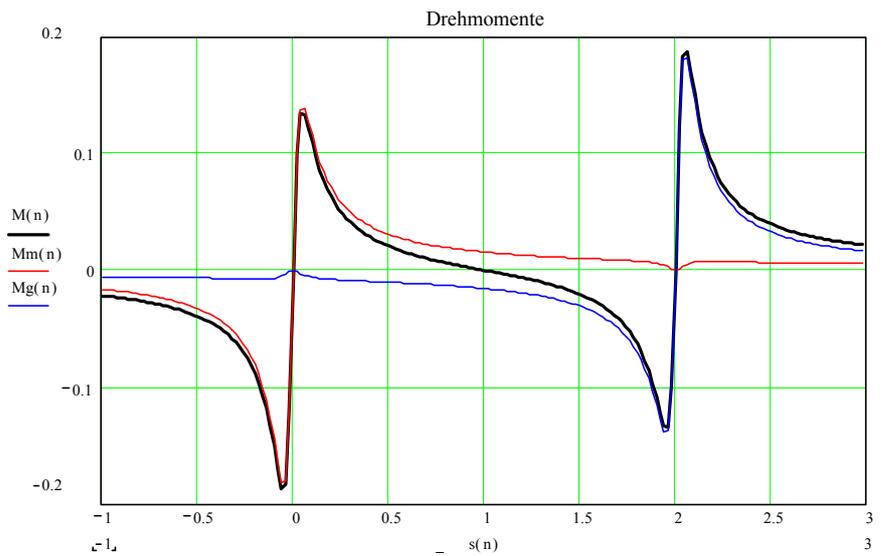


Bild 12.21: Drehmomente für Mit- und Gegensystem bei Unterbrechung eines Statorstranges.

Im praktischen Fall läuft die Maschine beim Ausfall einer weiter, hat aber wegen dem kleineren Kippmoment dann höhere Verluste, was im Dauerbetrieb zur Zerstörung der Maschine führen kann. Wenn die Phase schon beim Einschalten ausgefallen ist läuft die Maschine nicht an.



## 13 Stromverdrängung

### 13.1 Stromverdrängung beim Käfigläufer

Widerstand  $R_s$  und Induktivität  $L_s$  der im Eisen eingebetteten Leiterstäbe sind von der Rotorfrequenz  $s \cdot \omega_s$  abhängig. Damit werden auch die Parameter  $R'_R$  und  $L'_{R\sigma}$  frequenz- bzw. drehzahlabhängig. Stromverdrängung bewirkt eine Erhöhung des Widerstands und eine Erniedrigung der Induktivität. Sie hängt von der Leitergeometrie und der Rotorfrequenz ab. Der maximale Effekt tritt bei der höchsten Frequenz auf, beim normalen Motorbetrieb also im Stillstand ( $s=1$ ). Die dann eintretende Widerstandserhöhung hat eine Erhöhung des Anzugsmoments (gegenüber dem Fall vernachlässigter Stromverdrängung) zur Folge. Durch zweckmäßige Gestaltung des Leiterquerschnitts (Hochstab- oder Tiefnutläufer) kann man eine wesentliche Erhöhung des Anzugsmoments erzielen. Im Nennbetrieb sinkt die Rotorfrequenz so weit ab, ( $s = s_N \ll 1$ ), dass praktisch keine Stromverdrängung mehr wirksam ist. Um die Betriebskennlinien von Stromverdrängungsläufer-Motoren berechnen zu können (z.B. aus dem Ersatzschaltbild), braucht man die Frequenzabhängigkeit von  $R'_R$  und  $L'_{R\sigma}$  bzw.  $R_s$  und  $L_s$ . Sie wird im Folgenden für Rechteckleiter hergeleitet.

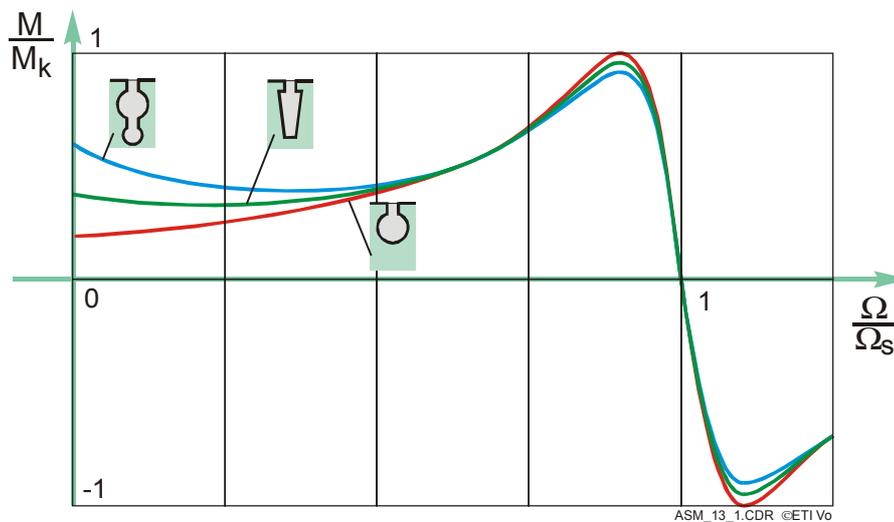


Bild 13.1: Erhöhung des Anzugsmoments durch Stromverdrängung.

Um die Stromverdrängung beim Anlauf zu ermöglichen baut man extra hohe oder besonders geformte Rotorstäbe, um den erhöhten Rotorwiderstand beim Anlauf auszunutzen. Wie in Bild 13.1 dargestellt wird dadurch das Anzugsmoment erhöht.

### 13.2 Phänomenologische Beschreibung

Text aus Gernar Müller:

Unter dem Einfluß der Stromverdrängung wird der Strom in den Stäben mit zunehmender Frequenz, d. h. bei Motorbetrieb mit abnehmender Drehzahl, mehr und mehr zum Luftspalt hin verdrängt. Ursache dieser Erscheinung ist das Nutenstrefelfeld im Bereich der Stäbe. Bild 13.2a zeigt dieses Streufeld zunächst für den Fall, daß in ei-

nem Rechteckstab über der Leiterhöhe konstante Stromdichte herrscht. Im Bild 13.2b ist der Stab in einer Reihe von Leiterschichten aufgelöst, die man sich einzeln mit entsprechenden Leiterschichten des benachbarten Stabes verbunden denken kann. Es ist offensichtlich, daß die unterste der so entstehenden Teilspulen in größerem Maße mit dem Streufeld verkettet ist und damit eine größere Streuinduktivität aufweist als die oberste Teilspule. Wenn die Frequenz des Stroms wächst und dabei so groß geworden ist, daß die Streureaktanzen gegenüber den Widerständen dominieren, ist zu erwarten, daß der Stabstrom in zunehmendem Maße in den oberen Teilspulen fließt, wie es Bild 13.2c andeutet. Damit kommt ein mit wachsender Frequenz immer kleiner werdender Teil des Leiterquerschnitts zur Wirkung; der wirksame Stabwiderstand wächst in Abhängigkeit von der Läuferfrequenz bzw. in Abhängigkeit vom Schlupf. Außerdem fließt der Strom dann vornehmlich in jenen Teilspulen, die eine kleine Streuinduktivität besitzen, so daß die auf Netzfrequenz bezogenen Streureaktanz  $X_{\sigma} = \omega \cdot L_{\sigma}$  der Stäbe in Abhängigkeit vom Schlupf  $s$  kleiner wird.

Im Bereich sehr kleiner Werte des Schlupfes verschwindet der Einfluß der Stromverdrängung. In diesem Fall wirken die Gleichstromwerte des Widerstands und der Streuinduktivität der Stäbe.

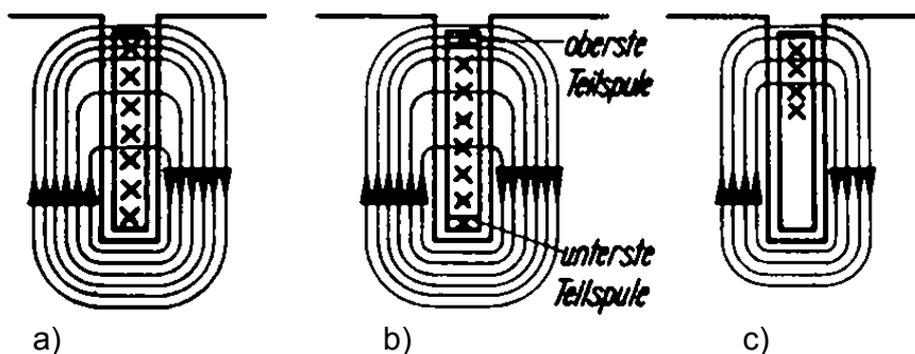


Bild 13.2: Stromverdrängung in einem Rechteckleiter, der in Eisen eingebettet ist.

Bei manchen Anwendungen ist die Stromverdrängung unerwünscht. Um die Verdrängung des Stromes zu minimieren unterteilt man den Stab in Einzelleiter, die gegeneinander isoliert sind. Zusätzlich müssen diese Stäbe dann auch noch innerhalb der Nut die Position wechseln. Zu diesem Zweck gibt es besondere Herstellungsverfahren.

Bilder von Röbelstab	
----------------------	--

Bild 13.3: Vermeidung der Stromverdrängung in einem Röbelstab.

### 13.3 Mathematische Behandlung der Stromverdrängung

Im folgenden wird gezeigt wie das Problem der einseitigen Stromverdrängung gelöst werden kann. Es wird sich zeigen, daß die Stromverdrängung schon bei 50 Hz berücksichtigt werden muß und von der Leiterhöhe abhängt.

#### 13.3.1 Voraussetzungen

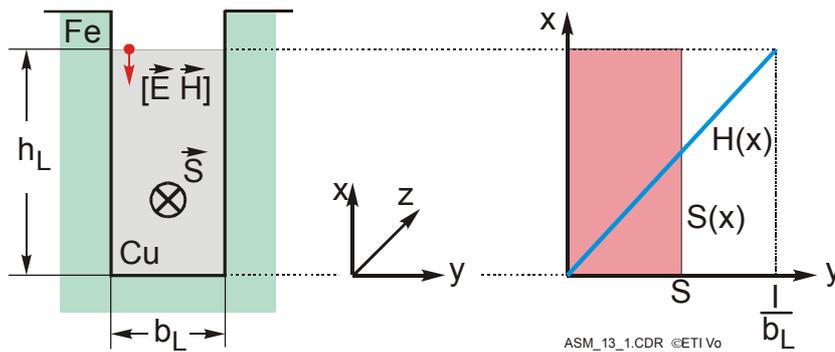


Bild 13.4: Stromverdrängung in einem Rechteckleiter, der in Eisen eingebettet ist.

- a) Ebenes Problem: Eine Stromdichte soll nur in der Z-Ebene vorhanden sein. Entsprechend gilt das dann auch für die el. Feldstärke.

$$S_x = 0, \quad S_y = 0, \quad S_z = S \neq 0$$

$$\vec{E} = \rho \vec{S} \quad \rightarrow \quad E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad E_z = E = \rho \cdot S$$

- b) Die Permeabilität und die elektrische Leitfähigkeit des Eisens soll unendlich gut sein. Dies bedeutet, daß alle Feldlinien senkrecht aus der Grenzfläche austreten und daß im Eisen kein el. Feld vorhanden ist.

$$\mu_{Fe} \rightarrow \infty, \quad \rho_{Fe} \rightarrow \infty$$

- c) Temperaturabhängigkeit des Leitermaterials  $\rho$  soll vernachlässigt werden

- d) Eindimensionale Stromverdrängung. Da nur in z-Richtung eine Stromdichte auftritt S, ergibt sich entsprechend dem Durchflutungsgesetz daß eine magnetische Feldstärke nur in y-Richtung auftreten kann.

$$H_x = 0, \quad H_z = 0, \quad H_y(x) = H \neq 0$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \rightarrow \quad B_x = 0, \quad B_z = 0, \quad B_y = B = \mu_0 H$$

- e) Feldverzerrung an der Nutöffnung bleibt unberücksichtigt

### 13.3.2 Gleichstrom

Ist der Leiterstrom ein Gleichstrom, dann tritt keine Stromverdrängung auf. Diese Verhältnisse sollen hier kurz aufgezeigt werden. Die Stromdichte und die el. Feldstärke innerhalb des Leiters sind:

$$S = \frac{I}{b_L \cdot h_L} \quad ; \quad E = \rho S \quad (13.1)$$

Die volumenspezifische Verluste sind:

$$v = E S = \rho S^2 \quad (13.2)$$

Dadurch ergeben sich die gesamten Verluste im Leiter

$$P_v = v \cdot b_L h_L l = R_0 \cdot I^2 \quad (13.3)$$

woraus der Gleichstromwiderstand folgt:

$$R_0 = \rho \cdot \frac{l}{b_L \cdot h_L} \quad (13.4)$$

Für die mag. Feldstärke gilt

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{S} \quad \rightarrow \quad \frac{dH}{dx} = S \quad (13.5)$$

mit  $H(x=0) = 0$  folgt  $H(x) = S \cdot x$  oder

$$\boxed{H(x) = \frac{I}{b_L} \cdot \frac{x}{h_L}} \quad \text{und} \quad (13.6)$$

$$H(x = h_L) = S \cdot h_L = \frac{I}{b_L} \quad (13.7)$$

Die Dichte der magnetischen Energie ist  $w_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2(x)$

Die im Leitervolumen gespeicherte magnetische Energie ergibt sich aus der Integration über das Volumen bzw. die Leiterhöhe.

$$W_m = b_L l \cdot \int_{x=0}^{h_L} w_m dx = b_L \cdot l \cdot \frac{\mu_0}{2} \cdot \int_{x=0}^{h_L} H^2(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot L_0 \cdot I^2 \quad (13.8)$$

Daraus folgt die Gleichstrominduktivität:

$$\boxed{L_0 = \mu_0 \cdot l \cdot \frac{h_L}{3 \cdot b_L}} \quad (13.9)$$

Es handelt sich hierbei um eine Teilinduktivität, die aus der Feldenergie im Leitervolumen resultiert.

Die bei Gleichstrom im Leitervolumen auftretenden Verluste  $P_v$  lassen sich auch aus dem Hüllenintegral des Energieströmungsvektors  $[\vec{E} \vec{H}]$  nach Poynting und Heaviside ermitteln. Zu beachten ist hierbei, daß  $[\vec{E} \vec{H}] d\vec{a}$  nur an der Leiteroberkante von null verschieden ist. Für die Verluste gilt

$$P_v = \oint_a [\vec{E} \vec{H}] d\vec{a} = l \cdot b_L \cdot E(x = h_L) \cdot H(x = h_L) = l \cdot b_L \cdot \rho S \cdot S \cdot h_L \quad (13.10)$$

### 13.3.3 Wechselstrom

Ist der Leiterstrom zeitlich veränderlich, dann muss man zur Berechnung der Feldstärke und der Stromdichteverteilung die Maxwell'schen Gleichungen heranziehen. Die auftretenden Frequenzen seien noch so beschränkt, dass der *Verschiebungsstrom vernachlässigt* werden kann. Es gilt im quasistationären Fall

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{S} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rho \vec{S} = \vec{E} \quad (13.11)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{\rho} \vec{E} \quad \text{oder} \quad \operatorname{rot} \{ \operatorname{rot} \vec{H} \} = \frac{1}{\rho} \cdot \operatorname{rot} \vec{E}$$

$$\operatorname{rot} \{ \operatorname{rot} \vec{H} \} = -\frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Nach dem mathematischen Satz ist  $\operatorname{rot} \{ \operatorname{rot} \vec{H} \} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \Delta \vec{H}$

Durch Vergleich und mit  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  erhält man daraus

$$\boxed{\Delta \vec{H} = -\frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}} \quad (13.12)$$

Mit den eingangs gemachten Voraussetzungen ergibt sich daraus die partielle Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{\partial^2 H(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial H(x,t)}{\partial t}} \quad (13.13)$$

Aus dem Induktionsgesetz kann man die genau gleiche Differentialgleichung für  $S(x,t)$  herleiten. Einfacher gewinnt man  $S$  aus  $H$  über  $\vec{S} = \operatorname{rot} \vec{H}$ :

$$\boxed{S(x,t) = \frac{\partial H(x,t)}{\partial x}} \quad (13.14)$$

Mit den Randbedingungen

$$H(x=0,t) = 0 \quad \text{und} \quad H(x=h_L,t) = \frac{i(t)}{b_L}$$

ist das Problem mathematisch bestimmt.

### 13.3.4 Analytische Lösung

Hier soll eine analytische Lösung für  $H(x,t)$  und  $S(x,t)$  für den stationären Fall mit sinusförmigem Leiterstrom

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re} \{ \underline{I} \cdot e^{j\omega t} \} \quad (13.15)$$

gefunden werden. Da es sich um einen linearen Effekt handelt, sind folgende Ansätze möglich:

$$H(x,t) = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re} \{ \underline{H}(x) \cdot e^{j\omega t} \} \quad (13.16)$$

$$S(x,t) = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re} \{ \underline{S}(x) \cdot e^{j\omega t} \} \quad (13.17)$$

$\underline{H}$  und  $\underline{S}$  sind komplexe Effektivwerte, z.B.  $\underline{H}(x) = H_{\text{eff}}(x) \cdot e^{j\varphi_H(x)}$

Geht man auf die komplexen Größen über, dann erhält man aus der partiellen Differentialgleichung folgende gewöhnliche Gleichung:

$$\boxed{\frac{d^2 \underline{H}(x)}{dx^2} = j \cdot \frac{\omega \mu_0}{\rho} \underline{H}(x)} \quad (13.18)$$

Außerdem ist entsprechend

$$\underline{S}(x) = \frac{d\underline{H}(x)}{dx} \quad (13.19)$$

Die Randbedingungen lauten dann für die komplexen Effektivwerte:

$$\underline{H}(x=0) = 0 \quad \text{und} \quad \underline{H}(x=h_L) = \frac{I}{b_L}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist durch

$$\underline{H}(x) = A \cdot \cosh kx + B \sinh kx \quad \text{bestimmt, wobei} \quad (13.20)$$

$$k^2 = j \frac{\omega \mu_0}{\rho} \quad \text{ist.} \quad (13.21)$$

Aus den Randbedingungen und dem Lösungsansatz erhält man

$$\underline{H}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad A = 0 \quad \text{und}$$

$$\underline{H}(h_L) = \frac{I}{b_L} \quad \rightarrow \quad B = \frac{I}{b_L \cdot \sinh(kh_L)}$$

Daraus ergibt sich die spezielle Lösung:

$$\underline{H}(x) = \frac{I \cdot \sinh(k \cdot x)}{b_L \cdot \sinh(k \cdot h_L)} = H_{\text{eff}}(x) \cdot e^{j\varphi_H(x)} \quad \text{und} \quad (13.22)$$

$$\underline{S}(x) = \frac{d\underline{H}(x)}{dx} = \frac{I \cdot k \cdot \cosh(k \cdot x)}{b_L \cdot \sinh(k \cdot h_L)} = S_{\text{eff}}(x) \cdot e^{j\varphi_S(x)} \quad (13.23)$$

Mit Gl.(13.21) wird der Faktor  $kh_L$

$$kh_L = \sqrt{j \frac{\omega \cdot \mu_0}{\rho}} \cdot h_L = \sqrt{2j} \cdot \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\rho}} \cdot h_L = (1+j) \cdot \xi \quad (13.24)$$

Wobei  $\xi$  als die dimensionslose, „reduzierte Leiterhöhe“ eingeführt wurde.

$$\xi = \sqrt{\frac{\pi \cdot \mu_0 \cdot f}{\rho}} \cdot h_L \quad \text{reduzierte Leiterhöhe} \quad (13.25)$$

Auch beim Argument  $k \cdot x$  führt man ebenfalls die reduzierte Leiterhöhe ein und erhält

$$k \cdot x = k \cdot x \cdot \frac{h_L}{h_L} = k \cdot h_L \cdot \frac{x}{h_L} = (1+j) \cdot \xi \cdot \frac{x}{h_L} \quad (13.26)$$

Für Cu-Leiter gilt beispielsweise  $\rho = \frac{1}{57} \cdot \frac{255 \text{ grad} + \vartheta}{255 \text{ grad}} 10^{-6} \Omega m$

Dabei ist  $\vartheta$  die Übertemperatur über 20°C

mit  $\mu_0 = 0,4\pi \cdot 10^{-6} \frac{\Omega s}{m}$  folgt zunächst allgemein

$$\xi_{Cu} = 1,06 \cdot \sqrt{\frac{f}{50 \text{ Hz}} \cdot \frac{255 \text{ grad}}{255 \text{ grad} + \vartheta}} \cdot \frac{h_L}{\text{cm}}$$

Bei den Parametern  $\vartheta \approx 30 \text{ grad}$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$ ,  $h_L = 2,5 \text{ cm}$  wird  $\xi_{Cu} \approx \frac{h_L}{cm}$  und  $\xi_{Cu} \approx 2,5$

### 13.3.5 Anwendung der allgemeinen Lösung

Aus obigen Lösung für die mag. Feldstärke Gl.(13.22) und die Stromdichte Gl.(13.23) soll nun der Betrag gebildet werden.

Es war die mag. Feldstärke

$$\underline{H}(x) = \frac{I}{b_L} \cdot \frac{\sinh(kx)}{\sinh(kh_L)} \quad \text{mit} \quad k = (1+j) \cdot \frac{\xi}{h}$$

Um daraus den Betrag zu bestimmen wird zunächst der Zähler  $\sinh\left\{(1+j) \cdot \xi \cdot \frac{x}{h}\right\}$

umgeformt. Zur einfacheren Schreibweise wird  $\xi \cdot \frac{x}{h} = a$  gesetzt. Es ist dann

$$\begin{aligned} \sinh\{(1+j) \cdot a\} &= \frac{e^a \cdot e^{ja} - e^{-a} \cdot e^{-ja}}{2} = \frac{e^a \cdot (\cos a + j \sin a) - e^{-a} \cdot (\cos a - j \sin a)}{2} \\ \sinh\{(1+j) \cdot a\} &= \frac{\cos a \cdot (e^a - e^{-a})}{2} + j \cdot \frac{\sin a \cdot (e^a + e^{-a})}{2} \\ &= \cos a \cdot \sinh a + j \sin a \cdot \cosh a \end{aligned} \quad (13.27)$$

Das Betragsquadrat davon ist:

$$\begin{aligned} \cos^2 a \cdot \sinh^2 a + \sin^2 a \cdot \cosh^2 a &= \cos^2 a \cdot \sinh^2 a + \sin^2 a \cdot (1 + \sinh^2 a) \\ &= \cos^2 a \cdot \sinh^2 a + \sin^2 a + \sin^2 a \cdot \sinh^2 a \\ &= \sinh^2 a + \sin^2 a \end{aligned}$$

Weitere Umformung durch Addition von +1 und -1

$$\sinh^2 a + 1 - 1 + \sin^2 a = \left( \frac{\sinh^2 a + 1}{\cosh^2 a} \right) + \left( \frac{-1 + \sin^2 a}{\cos^2 a} \right) = \cosh^2 a - \cos^2 a$$

Nun kann man nach  $x = \frac{x+x}{2}$  die beiden Gleichungen addieren und erhält dann für den Zähler:

$$\begin{aligned} \frac{(\sinh^2 a + \sin^2 a) + (\cosh^2 a - \cos^2 a)}{2} &= \frac{\overbrace{\cosh^2 a + \sinh^2 a}^{\cosh 2a} - \overbrace{\cos^2 a + \sin^2 a}^{\cos 2a}}{2} \\ &= \frac{\cosh 2a - \cos 2a}{2} \end{aligned} \quad (13.28)$$

Im Nenner des Ausdrucks kann die gleiche Umformung erfolgen. Der Betrag des komplexen Stromes ist I. Damit erhält man für den Betrag (Effektivwert) der mag. Feldstärke

$$H_{\text{eff}}(x) = \frac{I}{b_L} \cdot \frac{\sqrt{\cosh(2a) - \cos(2a)} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\cosh(2\xi) - \cos(2\xi)}} = H_{\text{eff}}(x) = \frac{I}{b_L} \cdot \sqrt{\frac{\cosh\left(2\xi \cdot \frac{x}{h_L}\right) - \cos\left(2\xi \cdot \frac{x}{h_L}\right)}{\cosh(2\xi) - \cos(2\xi)}}$$

$$H_{\text{eff}}(x) = \frac{I}{b_L} \cdot \sqrt{\frac{\cosh\left(2\xi \cdot \frac{x}{h_L}\right) - \cos\left(2\xi \cdot \frac{x}{h_L}\right)}{\cosh(2\xi) - \cos(2\xi)}} \quad (13.29)$$

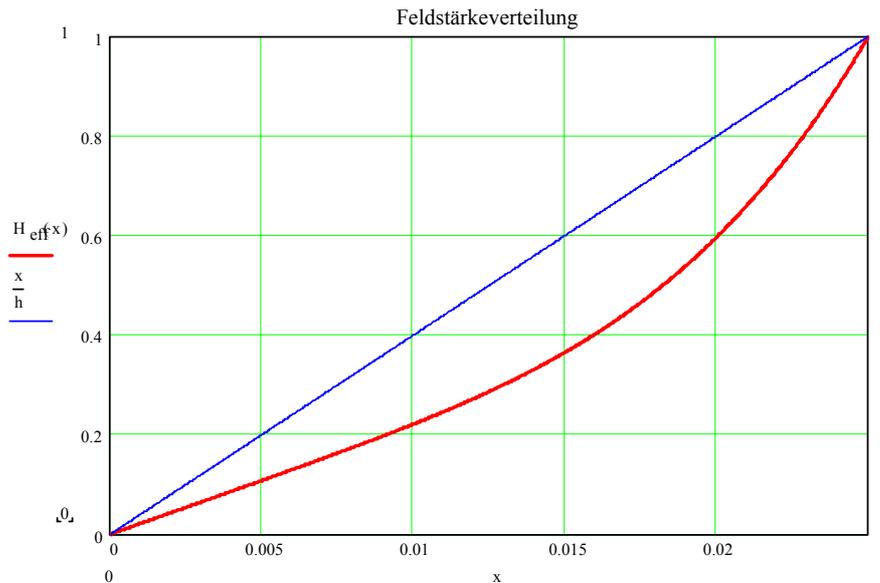


Bild 13.5: Magnetische Feldstärke als Funktion der Leiterhöhe  $x$ . Bei  $x=0$  ist der Leitergrund; bei  $x=h_L$  die Leiteroberfläche  $\xi = 2,628$ .

Auch aus der Gleichung für die Stromdichte soll der Betrag berechnet werden. Zunächst hat man die Ausgangsgleichung

$$\underline{S}(x) = \frac{I \cdot k}{b_L} \cdot \frac{\cosh(kx)}{\sinh(kh_L)} \quad \text{mit} \quad k = (1+j) \cdot \frac{\xi}{h} \quad (13.30)$$

Aus dieser Gl. soll der Betrag berechnet werden. Dazu wird zunächst nur der komplexe Faktor  $\cosh\left\{(1+j) \cdot \xi \cdot \frac{x}{h}\right\}$  umgeformt; der Faktor  $k$  kann leicht behandelt werden.

Zur einfacheren Schreibweise wird wieder  $\xi \cdot \frac{x}{h} = a$  gesetzt. Es ist dann

$$\cosh\{(1+j) \cdot a\} = \frac{e^a \cdot e^{ja} + e^{-a} \cdot e^{-ja}}{2} = \frac{e^a \cdot (\cos a + j \sin a) + e^{-a} \cdot (\cos a - j \sin a)}{2}$$

$$\cosh\{(1+j) \cdot a\} = \frac{\cos a \cdot (e^a + e^{-a})}{2} + j \cdot \frac{\sin a \cdot (e^a - e^{-a})}{2} \quad (13.31)$$

$$= \cos a \cdot \cosh a + j \sin a \cdot \sinh a$$

Das Betragsquadrat davon ist:

$$\begin{aligned} \cos^2 a \cdot \cosh^2 a + \sin^2 a \cdot \sinh^2 a &= \cos^2 a \cdot \cosh^2 a + \sin^2 a \cdot (\cosh^2 a - 1) \\ &= \cosh^2 a \cdot (\cos^2 a + \sin^2 a) - \sin^2 a \\ &= \cosh^2 a - \sin^2 a \end{aligned}$$

Umformung durch Addition von +1 und -1

$$\cosh^2 a - 1 + 1 + \sin^2 a = \left( \frac{\cosh^2 a - 1}{\sinh^2 a} \right) + \left( \frac{+1 - \sin^2 a}{\cos^2 a} \right) = \sinh^2 a + \cos^2 a$$

Nun kann man nach  $x = \frac{x+x}{2}$  die beiden Gleichungen addieren und erhält:

$$\begin{aligned} \frac{(\cosh^2 a - \sin^2 a) + (\sinh^2 a + \cos^2 a)}{2} &= \frac{\overbrace{\cosh^2 a + \sinh^2 a}^{+\cosh 2a} + \overbrace{\cos^2 a - \sin^2 a}^{+\cos 2a}}{2} \\ &= \frac{\cosh 2a + \cos 2a}{2} \end{aligned} \tag{13.32}$$

Im Nenner des Ausdrucks kann wieder die gleiche Umformung erfolgen. Zu berücksichtigen ist noch der komplexe Faktor  $k = (1+j) \cdot \frac{\xi}{h}$ . Für diesen kann man auch

$k = (1+j) \cdot \frac{\xi}{h} = \sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ} \cdot \frac{\xi}{h}$  schreiben, so daß die Betragsbildung einfach wird. Damit erhält man für den Betrag (Effektivwert) der Stromdichte

$$\begin{aligned} S_{eff}(x) &= \frac{I \cdot \sqrt{2}}{b_L \cdot h_L} \cdot \frac{\sqrt{\cosh 2a + \cos 2a}}{\sqrt{\cosh 2\xi - \cos 2\xi}} = S_{eff}(x) = \frac{I \cdot \sqrt{2}}{b_L \cdot h_L} \cdot \sqrt{\frac{\cosh\left(2\xi \cdot \frac{x}{h_L}\right) + \cos\left(2\xi \cdot \frac{x}{h_L}\right)}{\cosh(2\xi) - \cos(2\xi)}} \\ \boxed{S_{eff}(x) &= \frac{I \cdot \sqrt{2}}{b_L \cdot h_L} \cdot \sqrt{\frac{\cosh\left(2\xi \cdot \frac{x}{h_L}\right) + \cos\left(2\xi \cdot \frac{x}{h_L}\right)}{\cosh(2\xi) - \cos(2\xi)}}} \end{aligned} \tag{13.33}$$

Die Gleichung beschreibt den Betrag der Stromdichte als Funktion der auf  $h_L$  bezogenen Leiterhöhe. In Bild 13.5 ist der Verlauf der Stromdichte als Funktion der auf  $h_L$  bezogenen Höhe für  $\xi = 2,628$  dargestellt.

Beispiel für  $\xi = 3$

$$\text{Stabverluste} = \rho b_L l \int_{x=0}^{h_L} S_{eff}^2(x) dx$$

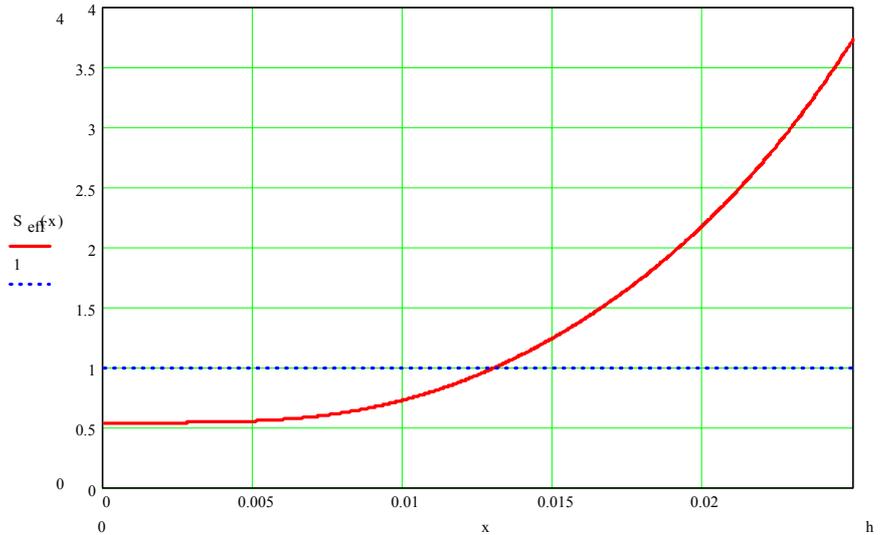


Bild 13.6: Magnetische Feldstärke und Stromdichte als Funktion der Leiterhöhe  $x$ . Bei  $x=0$  ist der Leitergrund; bei  $x=h_L$  die Leiteroberfläche  $\xi = 2,628$ .

### 13.3.6 Berechnung des Phasenwinkels der Stromdichte

Berechnung des Phasenwinkels der Stromdichte: mit  $\underline{I} = I$

$$\underline{S}(x) = \frac{I \cdot \xi}{b_L \cdot h_L} \cdot \frac{(1+j) \cdot \cosh\left\{(1+j) \cdot \xi \cdot \frac{x}{h_L}\right\}}{\sinh\{(1+j) \cdot \xi\}} = S_{eff}(x) e^{j\varphi_S(x)} \quad (13.34)$$

Es ist

$$\cosh\left\{(1+j) \cdot \xi \cdot \frac{x}{h_L}\right\} = \underbrace{\cosh\left(\xi \cdot \frac{x}{h_L}\right) \cdot \cos\left(\xi \cdot \frac{x}{h_L}\right)}_a + j \underbrace{\sinh\left(\xi \cdot \frac{x}{h_L}\right) \cdot \sin\left(\xi \cdot \frac{x}{h_L}\right)}_b$$

und

$$\sinh\{(1+j) \cdot \xi\} = \underbrace{\sinh \xi \cdot \cos \xi}_\alpha + j \underbrace{\cosh \xi \cdot \sin \xi}_\beta$$

Mit den so definierten Abkürzungen kann man für die Stromdichte angeben

$$\underline{S}(x) = \frac{I \cdot \xi}{b_L \cdot h_L} \cdot \frac{(1+j) \cdot (a+jb)}{\alpha+j\beta} = \frac{I \cdot \xi}{b_L \cdot h_L} \cdot \frac{(1+j) \cdot (a+jb)(\alpha-j\beta)}{(\alpha+j\beta) \cdot (\alpha-j\beta)}$$

und daraus den Phasenwinkel

$$\tan \varphi_S(x) = \frac{a(\alpha-\beta) + b(\alpha+\beta)}{a(\alpha+\beta) - b(\alpha-\beta)} \quad \text{oder}$$

$$\tan \varphi_S(x) = 45^\circ + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$\frac{x}{h_L}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\varphi_S$ [°]	-126,8	-121,7	-106,6	-84,78	-61,85	-41,33	-23,01	-5,77	11,13	28,05	45,08

$\frac{S_{eff}}{(\sqrt{2}I/b_L h_L)}$	0,299	0,300	0,312	0,359	0,465	0,638	0,884	1,214	1,652	2,234	3,01
---------------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	------

Tabelle für  $\xi = 3$ :

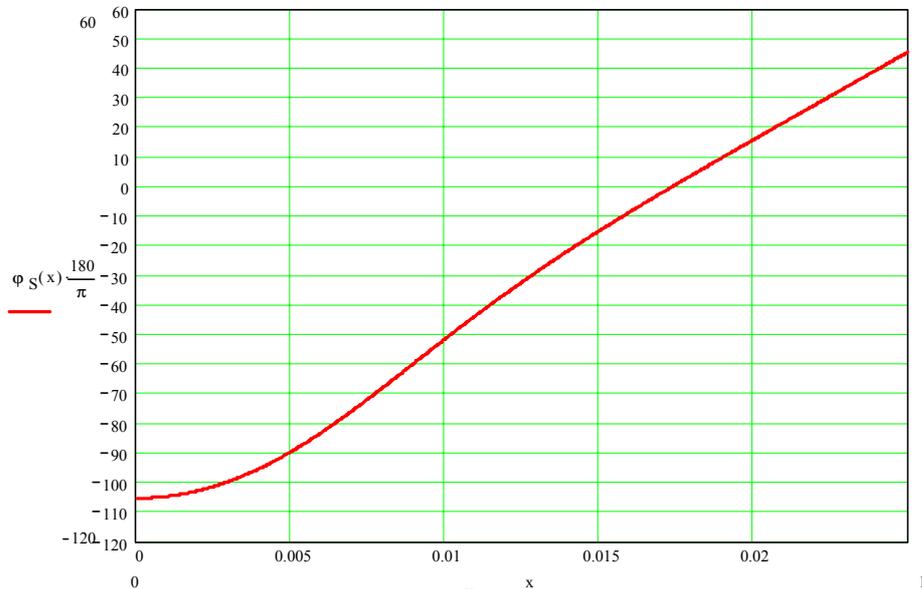


Bild 13.7: Phasenwinkel der Stromdichte als Funktion der auf  $h_L$  bezogenen Leiterhöhe. Bei  $x=0$  ist der Leitergrund; bei  $x=h_L$  die Leiteroberfläche  $\xi = 2,628$ .

Im innern des Leiters ist der Momentanstrom gegenüber dem Gesamtstrom erheblich in der Phase verdreht (Bild 13.8).

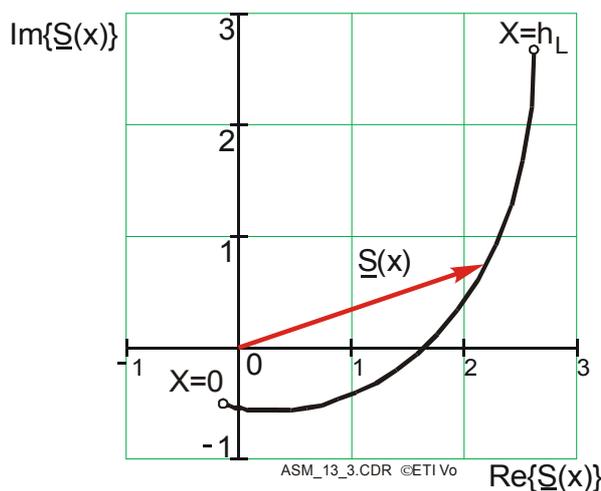


Bild 13.8: Ortskurve der komplexen Stromdichte  $\underline{S}(x)$  als Funktion der auf  $h_L$  bezogenen Leiterhöhe. Bei  $x=0$  ist der Leitergrund; bei  $x=h_L$  die Leiteroberfläche  $\xi = 2,628$ .

### 13.3.7 Berechnung von Augenblicksverläufen der Stromdichte

Nun interessiert noch, welchen Zeitverlauf die Stromdichte im innern des Leiters besitzt. Für den Strom gilt

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos \omega t = b_L \cdot \int_{x=0}^{h_L} S(x,t) dx \quad (13.35)$$

$$S(x,t) = \sqrt{2} \cdot S_{\text{eff}}(x) \cdot \cos[\omega t + \varphi_S(x)] \quad (13.36)$$

**Beispiele:**

$$\omega t = 0 \rightarrow i(0) = \sqrt{2} \cdot I$$

$$\omega t = \frac{\pi}{2} \rightarrow i(90^\circ) = 0$$

Beim Stromnulldurchgang tritt ein von null verschiedener Momentanwert der Stromwärmeverluste

$$\rho b_L l \int_{x=0}^{h_L} S^2(x,t) dx \text{ auf.}$$

Es ist

$$S^2(x,t) = S_{\text{eff}}^2(x) \cdot (1 + \cos 2[\omega t + \varphi_S(x)])$$

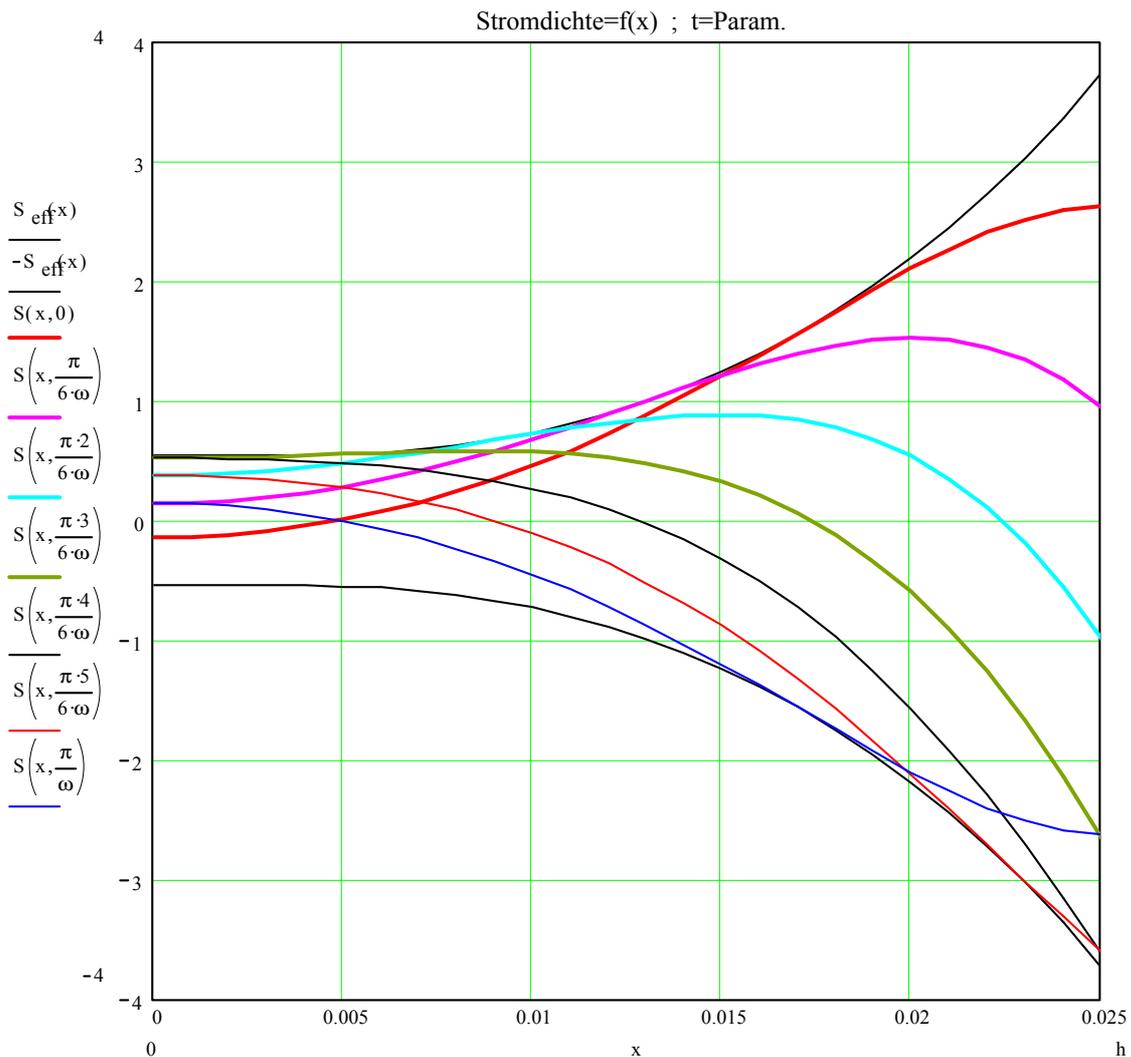


Bild 13.9: Verlauf der Stromdichte innerhalb des Leiters zu verschiedenen Zeit-

punkten  $\omega t = \left\{ 0; \frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{6}; \frac{3\pi}{6}; \frac{4\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \pi \right\}$ .  $\xi = 2,628$  Außen sind die Hüllkurven eingetragen, die durch Gl.(13.33) gegeben sind.

Aus dem Bild erkennt man, daß innerhalb des Leiters nicht überall der gleiche Strom fließt. Die zeitliche Erregung ist nach Gl.(xxx) cosinusförmig. Deshalb muß das Integral über die Stromdichte zu jedem Zeitpunkt den momentan fließenden Strom ergeben. Greift man z.B. einen Zeitpunkt heraus, bei dem der Momentanstrom gerade Null ist, so erkennt man, daß die Stromdichte innerhalb des Leiters keineswegs Null ist. Es zeigt sich vielmehr, daß die Stromdichten zu diesem Zeitpunkt positiv und negativ sind. Das bedeutet, daß z.B. im Oberen Leiter der Strom in z-Richtung und im unteren Teil entgegengesetzt fließt und natürlich auch Verluste verursacht.

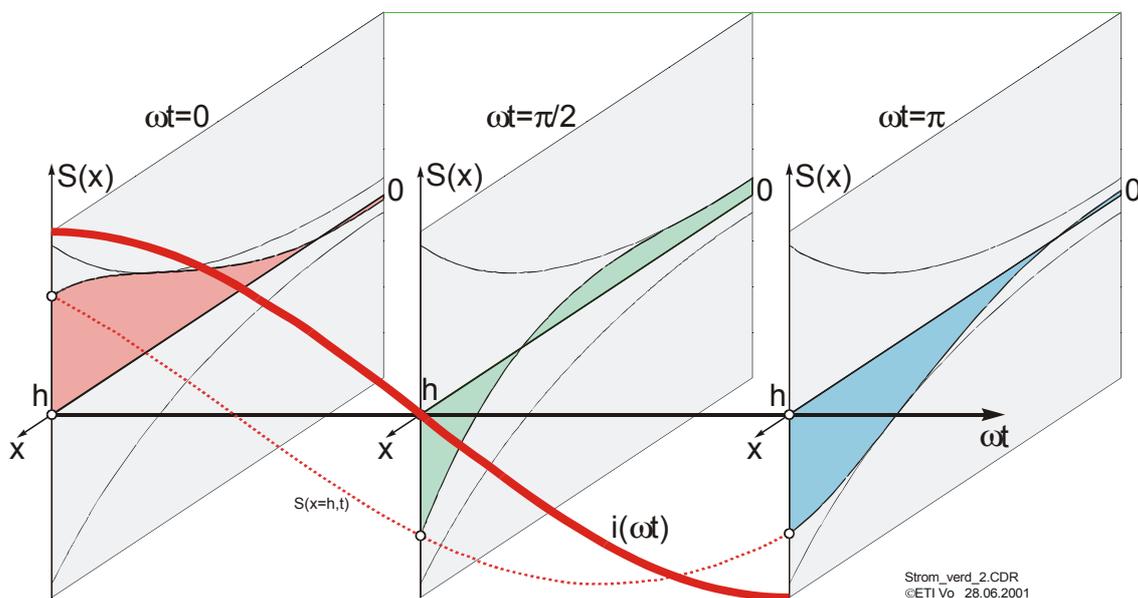


Bild 13.10: Momentane Stromverteilung innerhalb des Leiters und zeitlicher Verlauf des Stromes (Mittelwert). Nach oben ist die Stromdichte, nach rechts die Zeit und nach vorne ist die Raumkoordinate x aufgetragen.  $\xi = 2,628$

### 13.3.8 Leistungsberechnung mit Hilfe des Poynting'schen Vektors

Leistungsberechnung mit Hilfe des Poynting'schen Vektors:

Nach dem Satz von Gauß ist

$$\oint_a [\vec{E} \vec{H}] d\vec{a} = - \int_{\tau} \text{div} [\vec{E} \vec{H}] \cdot d\tau \tag{13.37}$$

$$-\text{div} [\vec{E} \vec{H}] = \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} = \vec{E} \vec{S} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(Verschiebungsstrom vernachlässigt!)

$$\oint_a [\vec{E} \vec{H}] d\vec{a} = \int_{\tau} \left( \vec{E} \vec{S} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\tau = P_v(t) + \frac{dW_m(t)}{dt} \tag{13.38}$$

Die in den Leiter pro Zeiteinheit strömende Energie ist gleich der Summe aus Stromwärmeverluste  $P_v(t)$  und Änderung der magnetischen Energie  $\frac{dW_m(t)}{dt}$  pro Zeiteinheit.

Zur leichteren Berechnung geht man auf die komplexen Effektivwerte über.

$$\oint_a [\underline{E} \underline{H}^*] d\vec{a} = \int_{\tau} (\rho \cdot \underline{S} \underline{S}^* + j \mu_0 \omega \underline{H} \underline{H}^*) d\tau = P_v + jQ$$

$P_v + jQ$  ist die komplexe Scheinleistung des Leiters.

$$\int_{\tau} \rho \underline{S} \underline{S}^* d\tau = \int_{\tau} \rho \cdot S_{eff}^2 d\tau = P_v = R \cdot I^2$$

$$\int_{\tau} \mu_0 \omega \underline{H} \underline{H}^* d\tau = \int_{\tau} \mu_0 \omega H_{eff}^2 d\tau = \omega \cdot \hat{W}_m = Q = \omega L \cdot I^2$$

$$\oint_a [\underline{E} \underline{H}^*] d\vec{a} = (R + j \omega L) I^2$$

$$\oint_a [\underline{E} \underline{H}^*] d\vec{a} = l b_L \rho \cdot \underline{S}(x = h_L) \cdot \underline{H}^*(x = h_L)$$

Nach Voraussetzung liegt der komplexe Effektivwert in der reellen Achse und es ist

$$\underline{H}(x = h_L) = \frac{I}{b_L} \quad (\text{Voraussetzung: } \underline{I} = I)$$

$$\underline{S}(x = h_L) = \frac{I}{b_L \cdot h_L} \cdot \left[ \xi \cdot \frac{\sinh 2\xi + \sin 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\xi} + j \xi \cdot \frac{\sinh 2\xi - \sin 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\xi} \right] \quad (13.39)$$

Durch Vergleich erhält man den frequenzabhängigen Widerstand

$$\boxed{R = \varphi(\xi) \cdot R_0} \quad \text{mit} \quad (13.40)$$

$$\boxed{\varphi(\xi) = \xi \frac{\sinh 2\xi + \sin 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\xi}} \quad (13.41)$$

Für  $\xi > 3$  wird:  $\varphi(\xi) \approx \xi$  und  $\boxed{R \sim \sqrt{\omega}}$

und die frequenzabhängige Induktivität

$$\boxed{L = \varphi'(\xi) L_0} \quad \text{mit} \quad (13.42)$$

$$\boxed{\varphi'(\xi) = \frac{3}{2\xi} \frac{\sinh 2\xi - \sin 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\xi}} \quad (13.43)$$

Für  $\xi > 3$  wird:  $\varphi'(\xi) \approx \frac{3}{2 \cdot \xi}$  und  $\boxed{X = \omega \cdot L \sim \sqrt{\omega}}$

Die Näherungen führen daher für  $\xi > 3$  zu folgenden Grenzwerten:

$$R_G = \omega \cdot L_G = \rho \cdot \frac{l}{b_L \cdot e} \tag{13.44}$$

mit der sog. Eindringtiefe

$$e = \sqrt{\frac{\rho}{\pi \cdot \mu_0 \cdot f}} \quad \text{oder} \quad e = \frac{h_L}{\xi} \quad \text{Eindringtiefe} \tag{13.45}$$

Bei der Eindringtiefe ist das magnetische Feld auf den Wert  $e^{-1} = 0,63$  abgeklungen.

Widerstand  $R$  und Reaktanz  $\omega L$  nehmen für  $\xi > 3$  mit wachsender Frequenz in gleichem Maße zu, während die Induktivität  $L$  abnimmt.

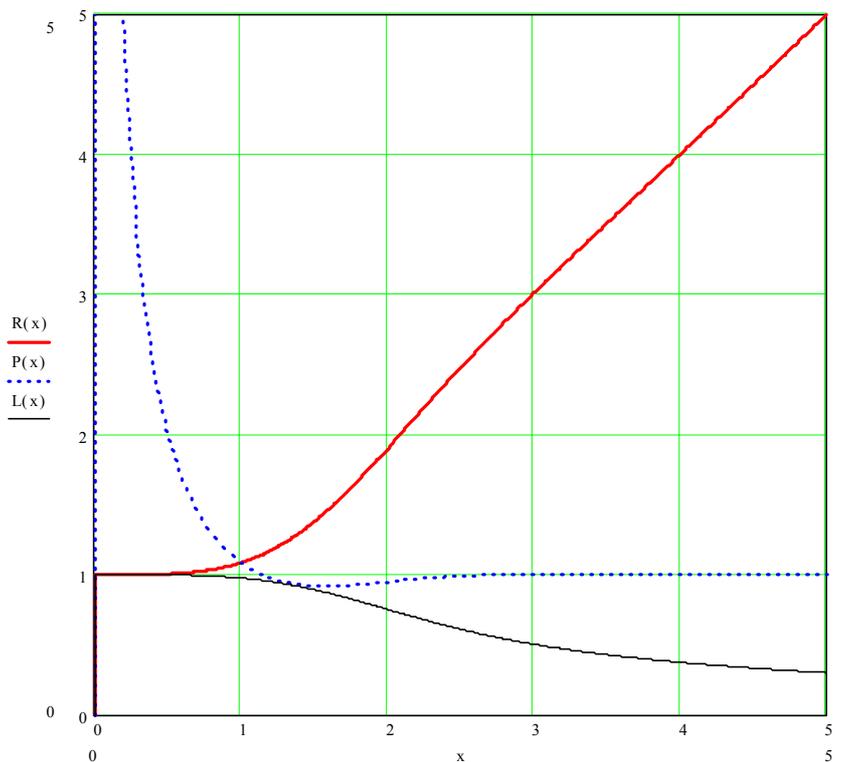


Bild 13.11: Ohmscher Widerstand, Induktivität und kritische Leiterhöhe als Funktion

von  $\frac{x}{h_L}$ .  $\xi = 2,628$

Die Bilder xx, yy, zz usw. sind mit folgenden Parametern gezeichnet:

$h_L = 25 \text{ mm}$	$b_L = 5 \text{ mm}$	$I = 200 \text{ A}$	$\kappa = 56 \frac{\Omega}{\text{m} \cdot \text{mm}^2}$
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$	$f = 50 \text{ Hz}$		
Bei Gleichstrom ist:			
$S = 1,6 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$	$E_z = 0,029 \frac{\text{V}}{\text{m}}$	$\xi = 2,628$	
$w = 4,57 \cdot 10^4 \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$	$P_v = 3,2 \text{ W}$	$R_0 = 8 \cdot 10^{-5} \Omega$	

Cu 20°C 50Hz:  $h_{Lkrit} = 1,26\text{cm}$

Bild 13.12: Induktivität

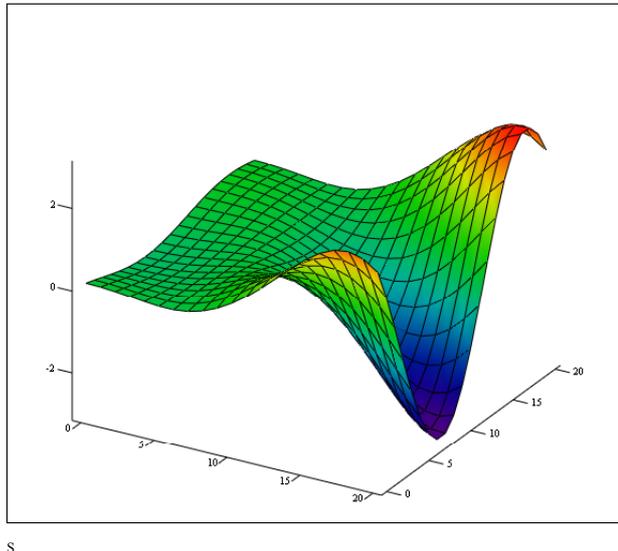


Bild 13.13: Zeitliche und räumliche Stromverteilung (MatCad S\_Veindr\_1.mcd)

für  $\xi > 3$

$$\left. \begin{aligned} R_G &= \xi \cdot R_0 = \sqrt{\frac{\pi \cdot f \cdot \mu_0}{\rho}} \cdot h_L \cdot \rho \cdot \frac{l}{b_L h_L} \\ \omega \cdot L_G &= 2\pi \cdot f \cdot \frac{3 \cdot L_0}{2 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 2\pi \cdot f}{2 \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot f \cdot \mu_0}{\rho}} \cdot h_L} \cdot \mu_0 \cdot \frac{l \cdot h_L}{3 \cdot b_L} \end{aligned} \right\} \text{wird gleich } \rho \cdot \frac{l}{b_L \cdot e}$$

wobei  $e$  = Eindringtiefe  $e = \frac{h_L}{\xi}$  ist.

Widerstand und Reaktanz werden für  $\xi > 3$  gleich groß.

### 13.3.9 Verluste im Leiter

$$P_v = \rho \frac{l}{b_L h_L} I^2 \cdot \varphi(\xi)$$

$\rho, l, b_L, I, f$  konstant

$$P_v(h_L) = \text{Minimum}$$

$$h_L = h_{Lkrit}, \quad \xi = \xi_{krit}$$

kritische Leiterhöhe  $h_{L,krit}$

Für  $h_L > h_{L,krit}$  steigen die Verluste trotz Querschnittsvergrößerung wieder an!

Voraussetzung sinusförmige Größen.

### 13.3.10 Kritische Leiterhöhe

Die Leiterhöhe wird bei einer bestimmten Frequenz und Geometrie des Leiters variiert, damit die Verluste im Leiter minimal werden.

$f = \text{konst}$  ;  $A = \text{konst}$  ;  $I = \text{konst}$ .

Für die Verluste gilt.

$$P_v = \rho \cdot \frac{l}{b_L \cdot h_L} \cdot I^2 \cdot \varphi(\xi) = \rho \cdot \frac{l}{b_L} \cdot I^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot f \cdot \mu_0}{\rho}} \cdot \frac{\varphi(\xi)}{\xi} \quad \text{oder auf die Gesamtverluste bezogen}$$

$$\boxed{\frac{P_v}{\left(\frac{\rho \cdot l \cdot I^2}{b_L \cdot h_L}\right)} = \frac{\sinh(2\xi) + \sin(2\xi)}{\cosh(2\xi) - \cos(2\xi)}} \quad \text{??? prüfen !!!} \quad (13.46)$$

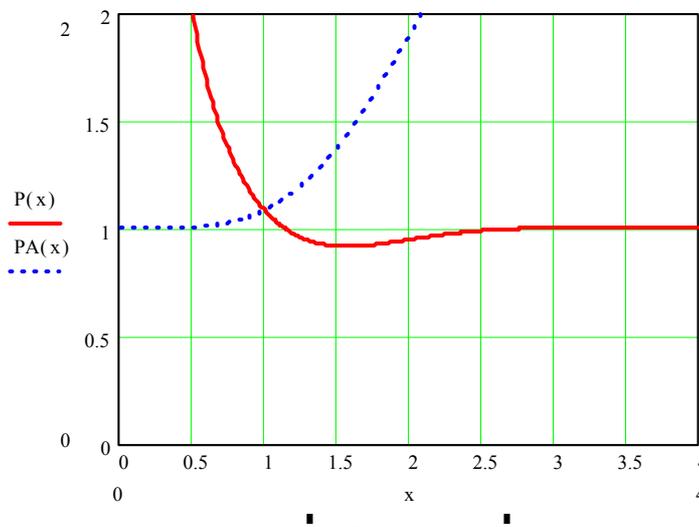


Bild 13.14: Funktion der Verluste als Funktion der Leiterhöhe bei sonst konstanten Parametern.  $\xi = 2,628$  . Durchgezogene Kurve: Querschnitt A wird mit der Leiterhöhe variiert; gestichelte Kurve: Querschnitt A des Leiters bleibt konstant.

$$h_{L,krit} = 1,26\text{cm} \quad \text{Cu} = 20^\circ\text{C}, 50\text{Hz}$$

Der Leiterquerschnitt wird bei dieser Betrachtung variiert. Das bedeutet bei kleinem  $\xi$  eine geringe Leiterhöhe und einen kleinen Querschnitt. Entsprechend hoch werden dann auch die Verluste. Bei großen  $\xi$  wird der Querschnitt und die Höhe des Leiters sehr groß, was aber die Verluste nicht weiter verkleinert. Dazwischen gibt es ein Op-

timum bei der kritischen Leiterhöhe, bei dem die Verluste im Leiter minimal werden. Die optimale Leiterhöhe hängt aber von dem Material und der Frequenz ab.

### 13.3.10.1 Konstanter Leiterquerschnitt

Läßt man den Leiterquerschnitt  $A$  konstant und variiert dann die Leiterhöhe ergibt sich für die Verluste

$$\boxed{\frac{P_v}{\left(\frac{\rho \cdot l \cdot I^2}{b_L \cdot h_L}\right)} = \frac{\sinh(2\xi) + \sin(2\xi)}{\cosh(2\xi) - \cos(2\xi)} \cdot \xi} \quad (13.47)$$

Diese Kurve entspricht der Widerstandserhöhung. Für kleine  $\xi$  hat man einen flachen Leiter, bei dem kaum Stromverdrängung auftritt; für große  $\xi$  ist der Leiter schmal und hoch, wodurch der Strom fast nur noch an der Oberfläche fließt und damit auch die Verluste entsprechend hoch werden (siehe gestichelte Kurve in Bild 13.14).

## 13.4 Ersatzschaltung für die Stromverdrängung

Für den in Eisen eingebetteten Rechteckstab wird aus den vorhergehenden Ergebnissen eine Ersatzschaltung ermittelt. Die Gleichungen führen auf ein sogenanntes Kettenleitermodell.

( $\underline{I} = I$ ):

Nach Gl.(xxx) ist

$$\underline{Z} = \underline{S}(x = h_L) \cdot \underline{H}^*(x = h_L) \cdot l \cdot b_L \cdot \rho \cdot \frac{1}{I^2}$$

$$\underline{Z} = (R + j\omega L) = l \cdot b_L \cdot \rho \cdot \frac{1}{b_L} \cdot \frac{k \cdot \cosh(kh_L)}{b_L \cdot \sinh(kh_L)} \quad (13.48)$$

Wegen  $(kh_L)^2 = j \cdot \frac{3 \cdot \omega \cdot L_0}{R_0}$

$$\underline{Z} = R_0 \cdot kh_L \cdot \frac{1}{\tanh(kh_L)} \quad (13.49)$$

Die hyperbolische Tangensfunktion in eine Reihe entwickelt ergibt

$$\tanh(kh_L) = kh_L - \frac{1}{3}(kh_L)^3 + \frac{2}{15}(kh_L)^5 - \frac{17}{315}(kh_L)^7 + \frac{62}{2835}(kh_L)^9 + \dots \quad (13.50)$$

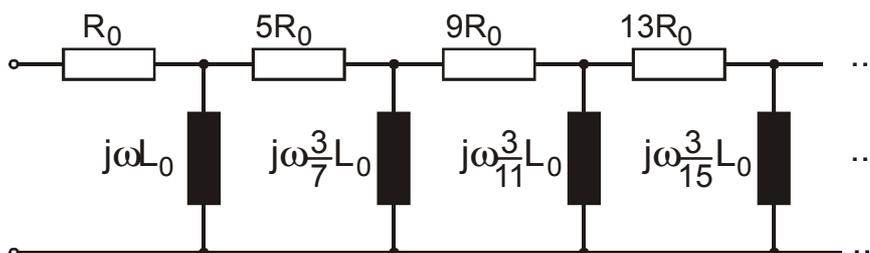


Bild 13.15: Kettenleiter als Ersatzschaltung

Da es sich bei der Stromverdrängung unter den hier gemachten Voraussetzungen um einen linearen Effekt handelt, kann dieses Kettenleitermodell auch zur Berechnung von Übergangsvorgängen benutzt werden.

Impedanz des Kettenleitermodells als Kettenbruch geschrieben:

$$\underline{Z} = R_0 + \frac{1}{\frac{1}{j\omega L_0} + \frac{1}{5R_0 + \frac{1}{\frac{1}{j\omega \frac{3}{7}L_0} + \frac{1}{9R_0 + \frac{1}{\frac{1}{j\omega \frac{3}{11}L_0} + \frac{1}{13R_0 + \frac{1}{\dots}}}}}}}} \quad (13.51)$$

Die Berücksichtigung von 3 Maschen (6. Näherung) ergibt bereits eine sehr gute Näherung für  $\underline{Z}$ .

Beispiel:  $\xi = 3$

Wegen  $\omega L_0 = \frac{2}{3}\xi^2 R_0$  ist dann  $\omega L_0 = 6R_0$  (Rechteckleiter).

Die Berechnung von 6 Näherungen zeigt die gute Konvergenz:

$$\underline{Z}_1 = R_0 \quad (13.52)$$

$$\underline{Z}_2 = R_0 (1 + j \cdot 6) \quad (13.53)$$

$$\underline{Z}_3 = R_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{j \cdot 6} + \frac{1}{5}}\right) = R_0 \cdot (3,95 + j 2,46) \quad (13.54)$$

$$\underline{Z}_4 = R_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{j \cdot 6} + \frac{1}{5 + j \frac{3}{7}6}}\right) = R_0 \cdot (2,83 + j 2,87) \quad (13.55)$$

$$\underline{Z}_5 = R_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{j \cdot 6} + \frac{1}{5 + \frac{1}{\frac{1}{j \frac{3}{7}6} + \frac{1}{9}}}}\right) = R_0 \cdot (3,00 + j 3,06) \quad (13.56)$$

$$\underline{Z}_6 = R_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{j \cdot 6} + \frac{1}{5 + \frac{1}{\frac{1}{j \frac{3}{7}6} + \frac{1}{9 + j \frac{3}{11}6}}}}\right) = R_0 \cdot (3,01 + j 3,02) \quad (13.57)$$

Die direkte Berechnung aus

$$\underline{Z} = R_0 \cdot kh_L \cdot \frac{1}{\tanh(k \cdot h_L)} \quad (13.58)$$

mit  $kh_L = (1+j)\xi$  ergibt mit  $\xi = 3$

$$\underline{Z} = R_0 (3,01 + j3,02) \quad .$$

Mit den für  $\xi > 3$  geltenden Näherungen folgt:

$$R \approx \xi R_0 = 3R_0 \quad (13.59)$$

$$L \approx \frac{3}{2\xi} L_0 = \frac{1}{2} L_0 \quad (13.60)$$

und mit  $\omega L_0 = 6R_0$  ist  $\cos L \approx 3R_0$  .

Das Ersatzschaltbild kann bei dynamischen Vorgängen eingebaut werden.

Einfluss der Stromverdrängung auf das Anzugsmoment:

$$\frac{\omega_s}{p} M_a = 3R'_R I_{Rk}^2 \quad s=1 \quad \text{Stillstand}$$

Aus der Ersatzschaltung:

$$I_{Rk}^2 \approx \frac{U_s^2}{(R_s + R'_R)^2 + (X_{s\sigma} + X'_{R\sigma})^2} \quad (13.61)$$

$$M_a \approx \frac{3p}{\omega_s} \frac{R'_R}{(R_s + R'_R)^2 + (X_{s\sigma} + X'_{R\sigma})^2} U_s^2 \quad (13.62)$$

$$R'_R = c \left[ \frac{R_r}{2 \sin^2(\alpha_{nR}/2)} + \varphi(\xi) R_{s0} \right]$$

$$c = \frac{(\omega_s \xi_{s1})^2 3}{(1/2)^2 N_R X_1^2}$$

$R_{s0}$ , Gleichstromwiderstand des in Eisen eingebetteten Leiters

$$X'_{R\sigma} = c \omega_s \left[ \frac{L_r}{2 \sin^2(\alpha_{nR}/2)} + L_{ss} + \varphi'(\xi) L_{s0} \right] + \sigma_{0RK} X_{Sh} \quad (13.63)$$

$L_{s0}$ , Gleichstrominduktivität bezüglich des Leitervolumens

$L_{ss}$ , Induktivität bezüglich des Feldraumes oberhalb des Leiters (Nutschlitz)

Keine Stromverdrängung (z.B. Cu-Leiter  $h_L < 1\text{cm}$ , 50Hz):  $\varphi(\xi) = 1, \quad \varphi'(\xi) = 1$

Stromverdrängung (z.B. Cu-Leiter  $h_L = 3\text{cm}$ , 50Hz):  $\varphi(\xi) \approx 3, \quad \varphi'(\xi) \approx 0,5$

Einfluss der Stromverdrängung auf die Rotorverluste durch Harmonische bei  $s = 0$ :

Rotorfrequenzen:  $(kv - 1 + s)\omega_s = \frac{v}{k}s_v\omega_s$

Leerlauf

	$s = 0$	$\rightarrow$	$s_v = 1 - \frac{k}{v}$
$v = 5$	$k = -1$	$\rightarrow$	$s_v = 1 + \frac{1}{5}$
$v = 7$	$k = 1$	$\rightarrow$	$s_v = 1 - \frac{1}{7}$

Auch bei Leerlauf ( $s = 0$ ) treten im Rotor Verluste auf

Bild 13.16: Zeichnung



## 14 Synchronmaschine

### 14.1 Bauformen

2 grundsätzlich verschiedene Bauformen

- a) Turbogenerator in KKW's vierpolige Turbos, sonst  $p = 1$
- b) Schenkelpolgeneratoren in Wasserkraftwerken.  $p$  bis über 50 für langsame Drehzahlen. Sonderbauformen: Rohrturbinen → Wasser läuft durch den Rotor.
- b) Permanenterregte Synchronmaschine  
Verwendung:
  - Kompressorantriebe über SR erhalten SM, das Verhalten wie bei GM
  - Pumpspeicherkraftwerke - Turbine auf der gleichen Achse
  - Hauptspindelantriebe – bei permanenterregter SM

Aufbau:

- Um eine Sinusform zu erreichen, wird die Wicklung entsprechend ausgeführt
- Mechanische Abmessungen der Pole werden so gewählt, dass nur wenig Oberschwingungen auftreten
- Dämpferwicklung auf dem Rotor dient zum Dämpfen von Schwingungen, indem in den Wicklungen asynchrone Momente auftreten.

### 14.2 Bilder zur SM

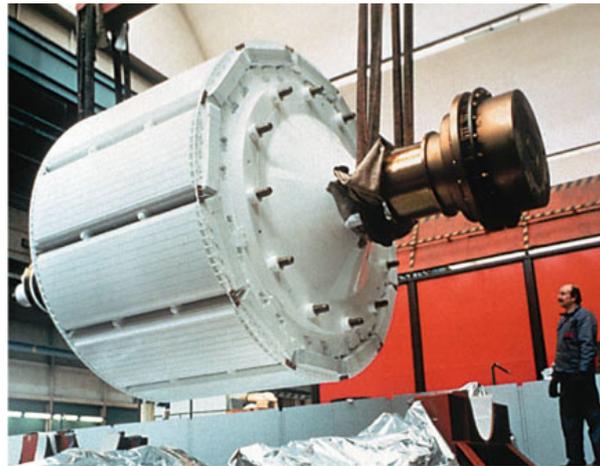
#### 14.2.1 Fremderregte Vollpol- und Schenkelpolmaschinen



Bild 14.1: Ständer einer Synchronmaschine für Windgenerator (ENERCON)



*New 100-MW (135,000-HP) synchronous motor used to operate the NTF wind tunnel*



*Rotor of the new, 100-MW (135,000-HP) synchronous motor*

Bild 14.2: Schenkelpolläufer 100 MW



Bild 14.3: Schenkelpolläufer mit Ständer

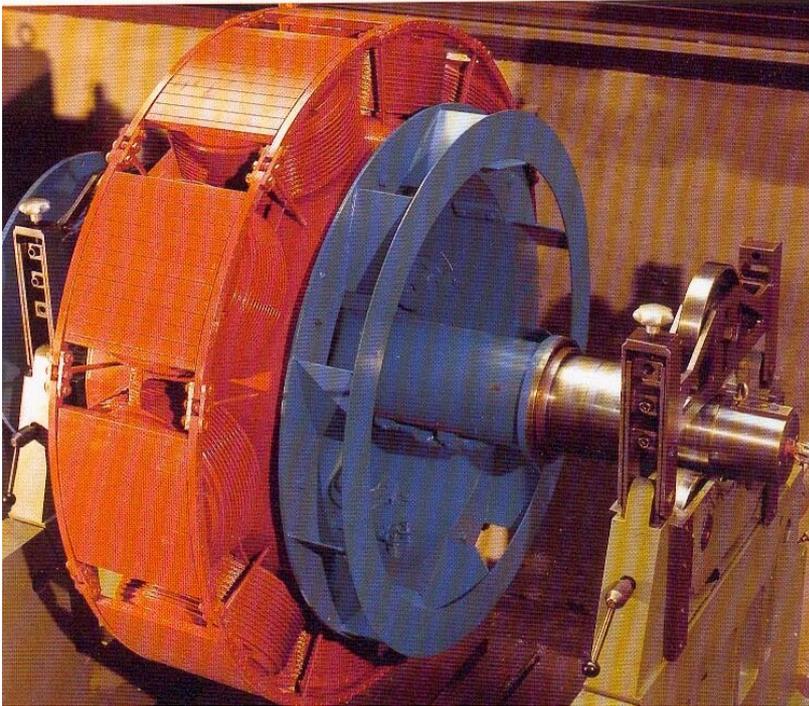


Bild 14.4: Schenkelpolläufer einer SM

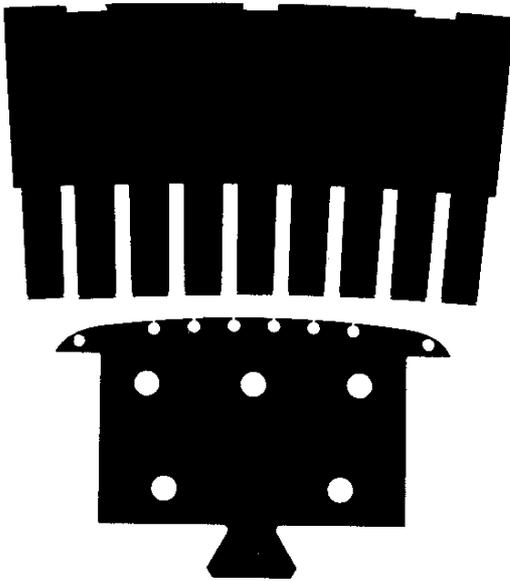


Bild 14.5: Einzelpol eines 250 MVA Generators mit Bohrungen für die Dämpferwicklung

### 14.2.2 Vollpolläufer

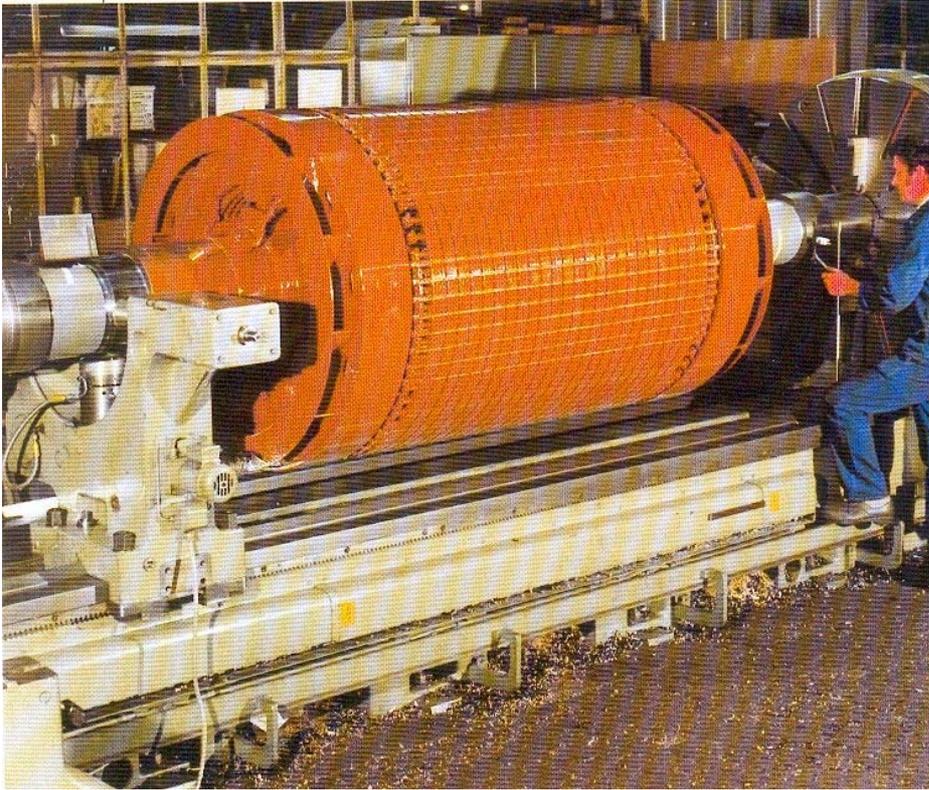


Bild 14.6: Vollpolläufer einer SM

### 14.2.3 Permanenterregte Synchronmaschinen

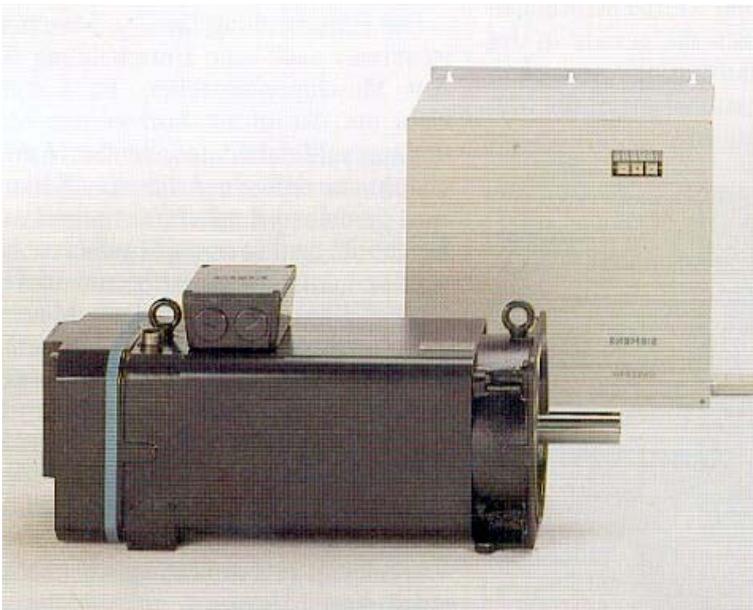


Bild 14.7: Permanenterregte SM mit Umrichter

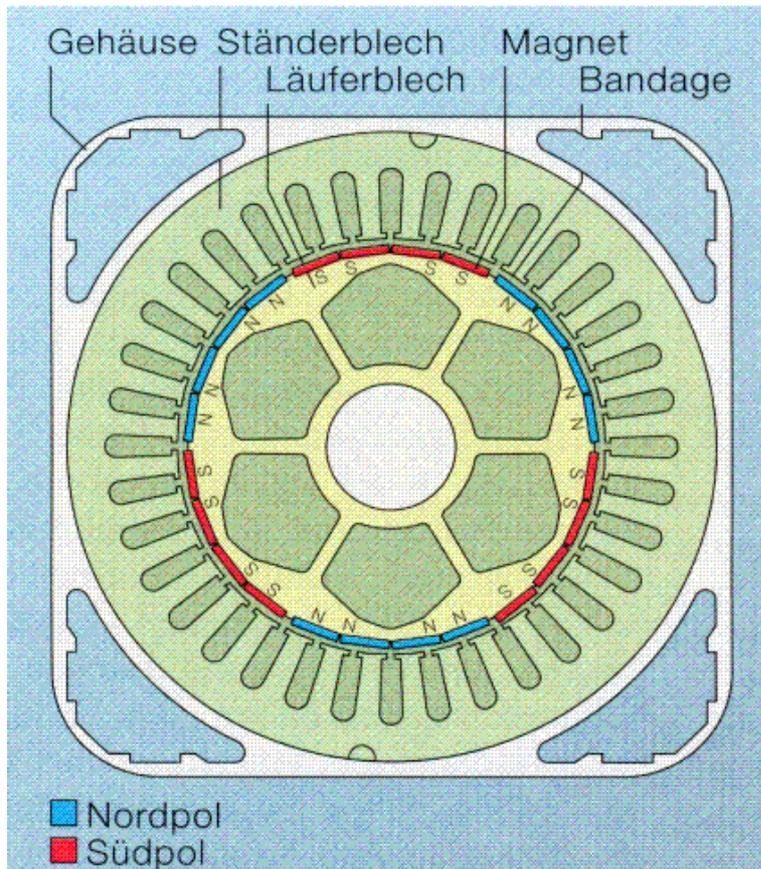


Bild 14.8: Schnittbild einer permanentenerregten SM mit aufgeklebten Magneten

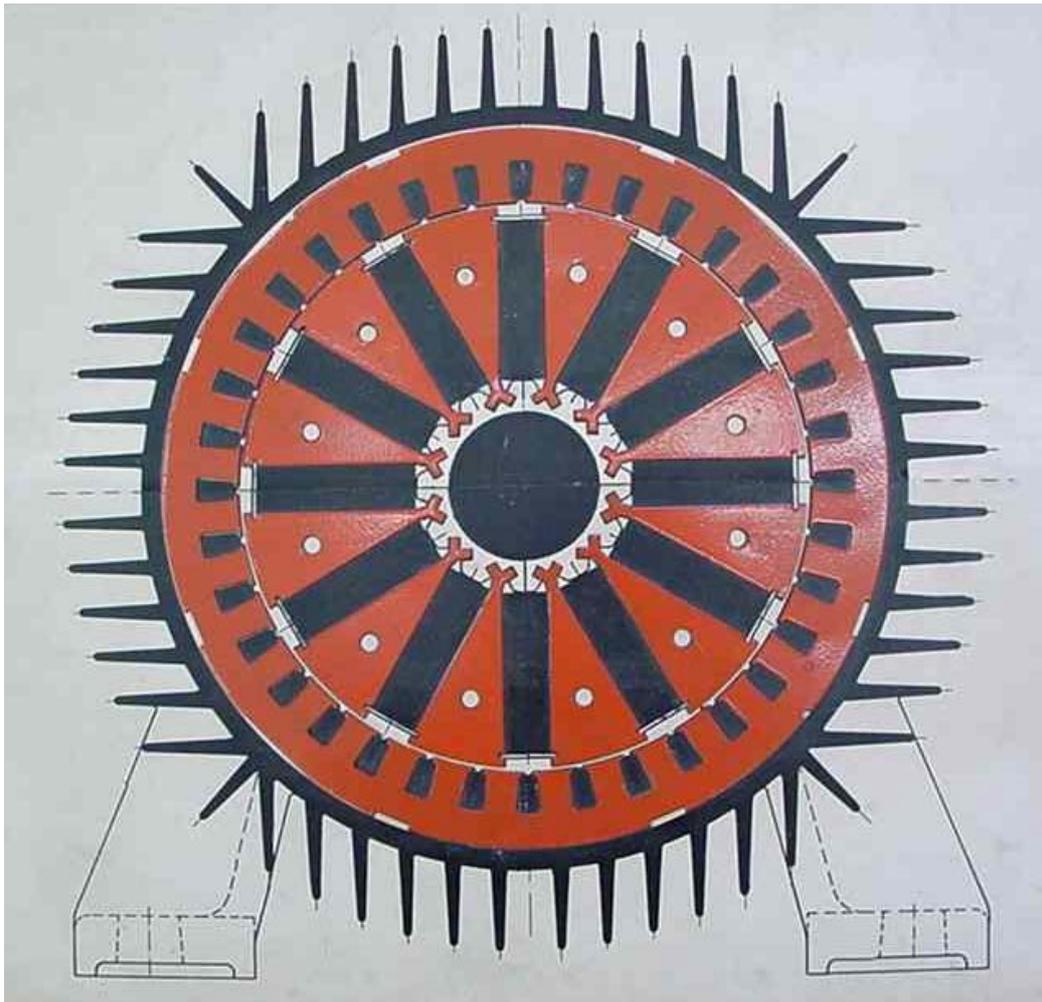


Bild 14.9: Schnittbild einer permanenten SM mit Flußsammler ; 30 kW

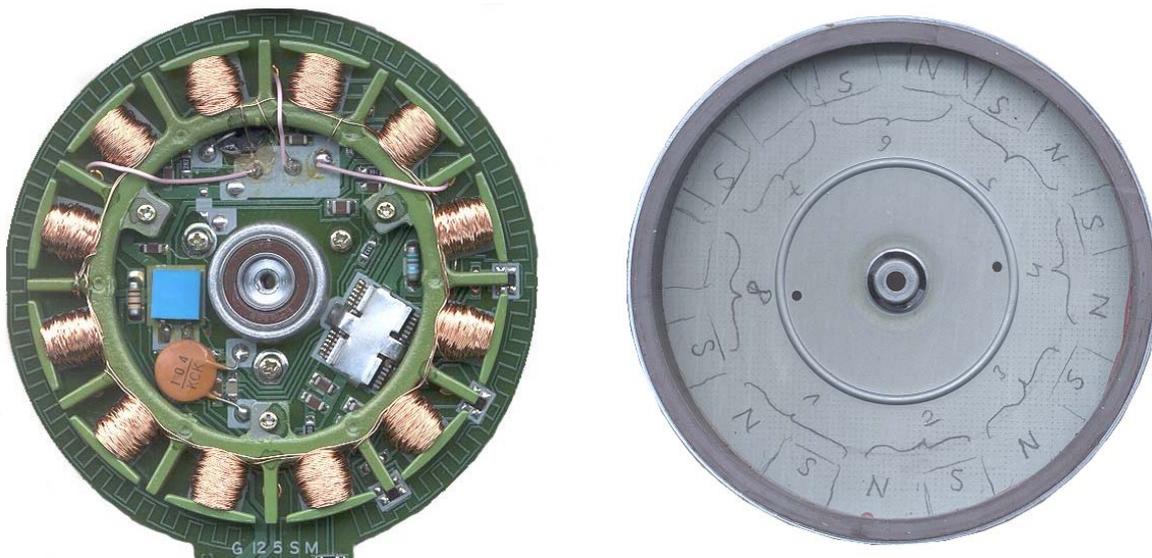


Bild 14.10: Permanenten SM; dreiphasig als Diskettenantrieb

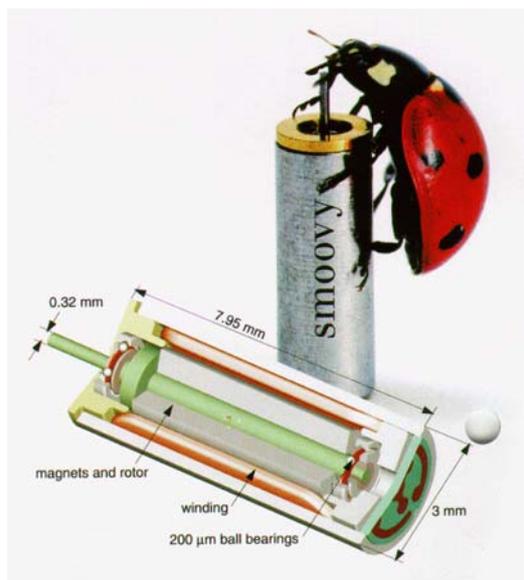


Bild 14.11: Mikromotor 3 mm Durchmesser; dreiphasige permanentenerregte SM

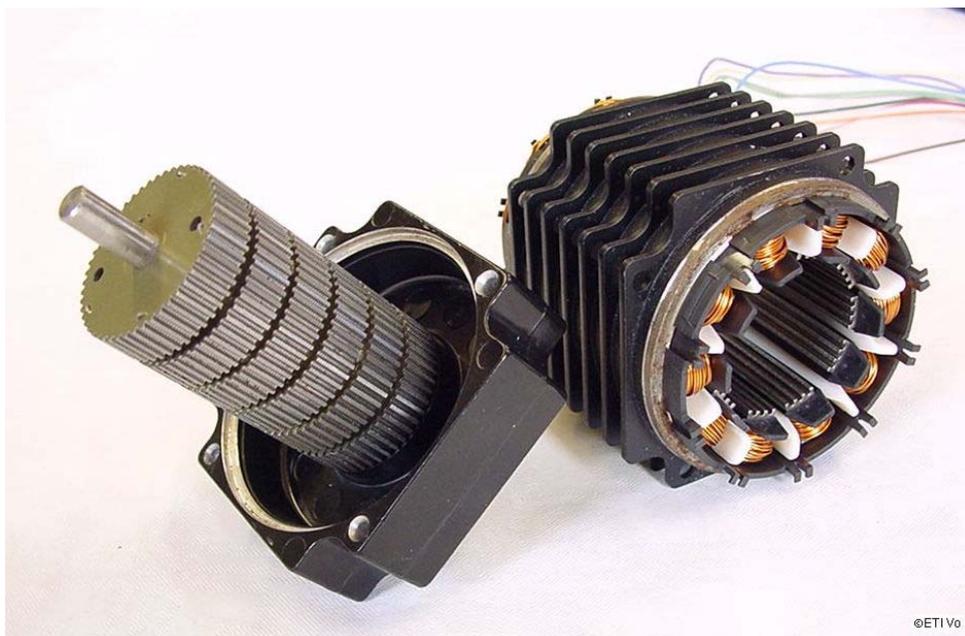


Bild 14.12: Hybrid Schrittmotor (Berger Lahr)

### 14.3 Systemgleichungen der Drehstromasynchronmaschine

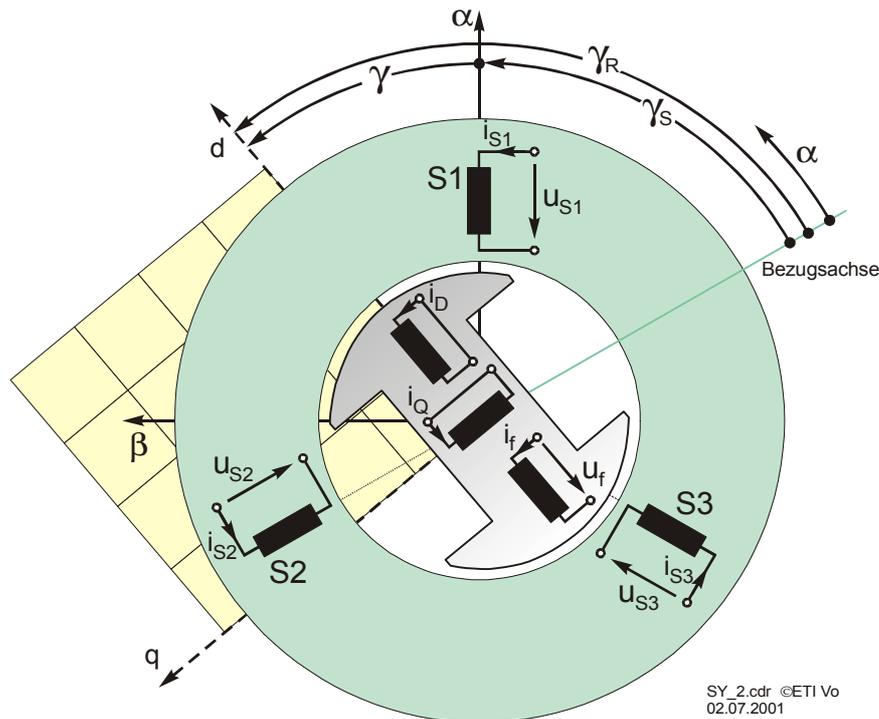


Bild 14.13: Definition der Winkel bei der symmetrischen Synchronmaschine

Wegen unsymmetrischem Rotor sind 2 Dämpferwicklungen nötig, die mit D und Q indiziert werden. Das grundsätzliche Spannungsgleichungssystem ist wie bei der Asynchronmaschine

$$\begin{bmatrix} u_S \\ u_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_S) & & & \\ & R_f & & \\ & & R_D & \\ & & & R_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_S \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \left\{ \begin{bmatrix} (L_{SS}) + (S_S) & (L_{Sf}) & (L_{SD}) & (L_{SQ}) \\ (L_{Sf})^T & L_{ff} & L_{fD} & 0 \\ (L_{SD})^T & L_{fD} & L_{DD} & 0 \\ (L_{SQ})^T & 0 & 0 & L_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_S \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \right\}$$

- $(L_{Sf})$  ist ein Vektor mit 3 Elementen
- $((L_{Sf})^T)$  ist ein Spaltenvektor
- Alle Wechselinduktivitäten, die mit f, D und Q indiziert sind, sind vom Rotorpositionswinkel  $\gamma$  unabhängig.
- Wechselinduktivitäten  $(L_{SS})$  sind ebenfalls von  $\gamma$  abhängig
- Alle anderen sind von  $\gamma$  abhängig.

Wechselinduktivität zwischen 2 Wicklungen a und b

Die Induktivität ist

$$L_{ab} \sim \int \frac{1}{\delta''} V_a \cdot V_b \cdot d\alpha$$

Da sich der Luftspalt  $\delta''$  mit der Drehung des Rotors ändert, ist  $\delta''$  nicht konstant. Damit man das  $\int$  geschlossen lösen kann, nimmt man einen sinusförmigen mag.

Leitwert an. Das  $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$  lässt sich nicht mehr geschlossen lösen. Daher nimmt

man  $\frac{1}{\delta''} = A + B \cdot \cos x$  an.

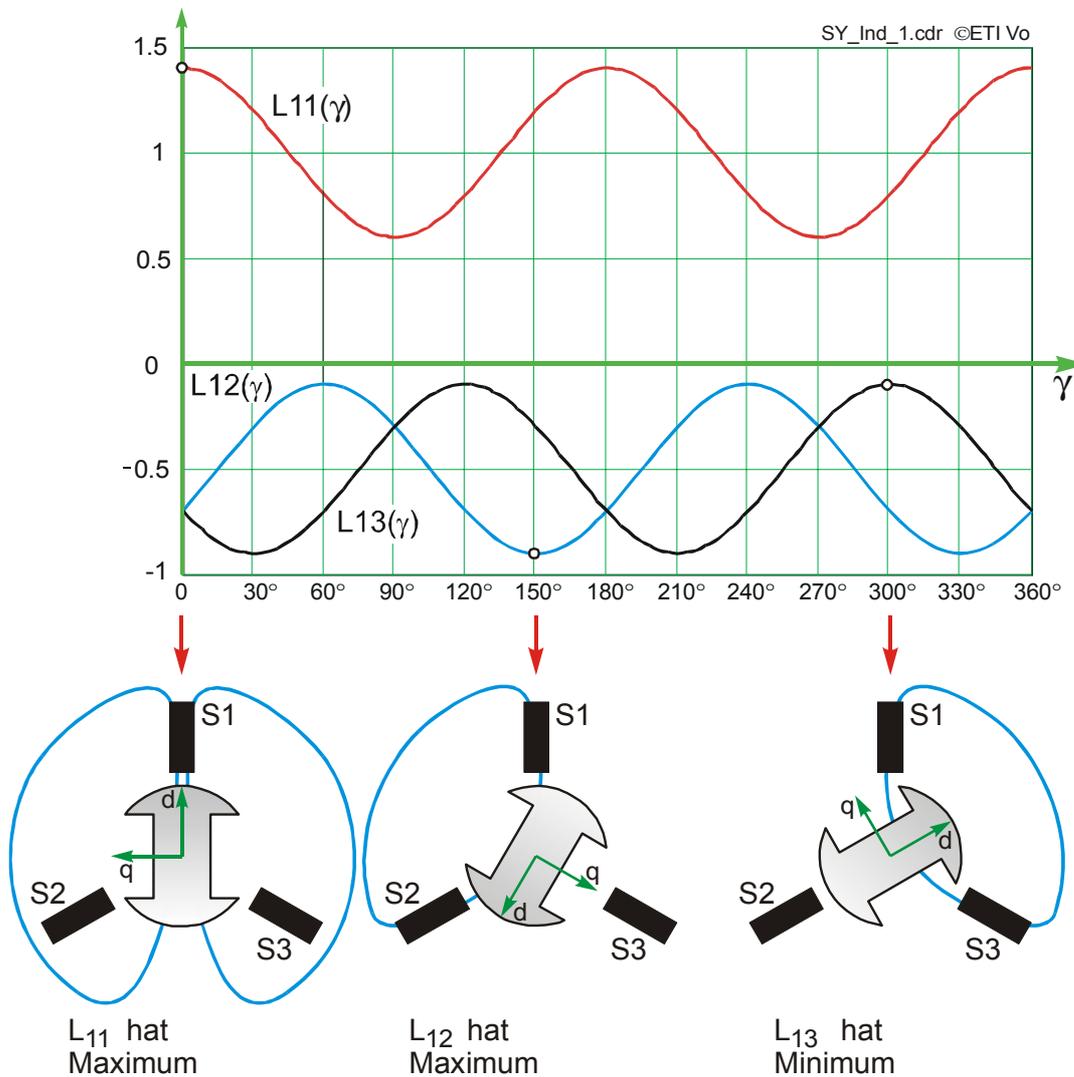


Bild 14.14: Wechselinduktivitäten zwischen den Strängen im Ständer als Funktion der Rotorstellung.

Für die Induktivitätsmatrix der Ständerinduktivitäten erhält man daher folgende Struktur:

$$(L_{SS}) = L_{SA} \begin{bmatrix} 1 + \sigma_{Sii} & -1/2 + \sigma_{Sik} & -1/2 + \sigma_{Sik} \\ -1/2 + \sigma_{Sik} & 1 + \sigma_{Sii} & -1/2 + \sigma_{Sik} \\ -1/2 + \sigma_{Sik} & -1/2 + \sigma_{Sik} & 1 + \sigma_{Sii} \end{bmatrix} + L_{SB} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos 2\gamma & \cos(2\gamma - 2\pi/3) & \cos(2\gamma - 4\pi/3) \\ \cos(2\gamma - 2\pi/3) & \cos(2\gamma - 4\pi/3) & \cos 2\gamma \\ \cos(2\gamma - 4\pi/3) & \cos 2\gamma & \cos(2\gamma - 2\pi/3) \end{bmatrix}}_{\text{Einfluss des sinusförmigen Luftspalts}}$$

$(L_{SS})$  ist symmetrisch

## BILD

Bild 14.15: Def. der Winkel





## 14 Synchronmaschine Feldfaktoren

### 14.1 Bestimmung der Feldfaktoren

Es wird die 1. Wicklung S1 betrachtet. Zunächst wird die Induktion (Felderregerkurve) bei konstantem Luftspalt bestimmt. Man erhält folgende Darstellung

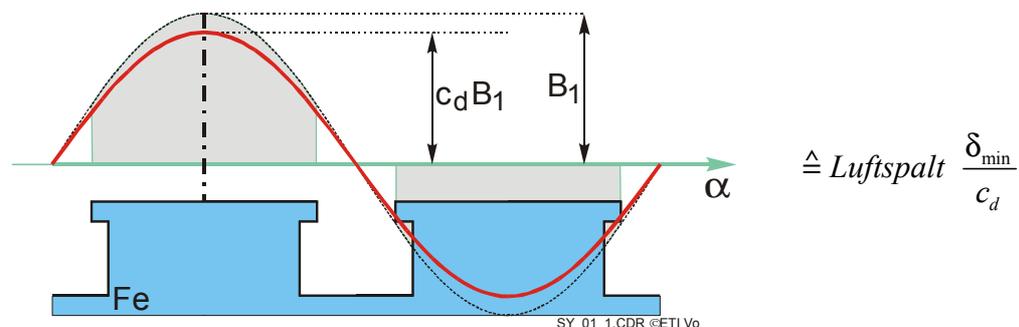


Bild 14.1: Feldverteilung bei der Winkelstellung  $\gamma = 0$

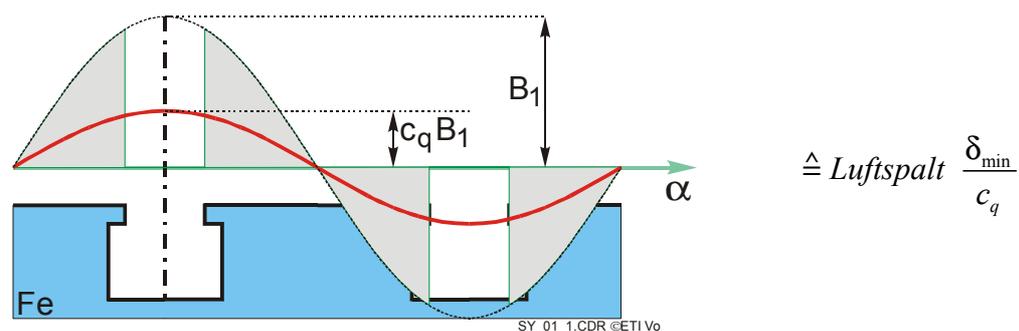


Bild 14.2: Feldverteilung bei der Winkelstellung  $\gamma = \frac{\pi}{2}$

$B_1$  ist die Amplitude der 1. Harmonischen des Luftspaltfelds unter der Annahme  $\delta' = \delta'_{\min} = \text{const}$  für eine bestimmte Statorerregung;

$c_d B_1$  ist die Amplitude der 1. Feldharmonischen bei Längsstellung  $\gamma = 0$  des realen Polrads und gleicher Statorerregung;

$c_q B_1$  ist die Amplitude der 1. Feldharmonischen bei Querstellung  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  des realen Polrads und gleicher Statorerregung.

#### Feldfaktoren:

Schenkelpolmaschine	$c_d < 1$	$c_q < c_d$
Vollpolmaschine	$c_d = c_q = 1$	
Bei manchen permanenterregten	$c_q < 1$	$c_d < c_q$

#### 14.1.1 Bestimmung der Induktivitäten

Wie bei der ASM (vergl. S. ??) erhält man auch hier eine Ständerinduktivität  $L_S$ . Diese ist

$$L_S = \frac{4 \cdot \mu_0 \cdot l \cdot \tau_p}{\pi^2 \cdot p \cdot \delta'_{\min}} \cdot (\omega_S \cdot \xi_{S1}) \quad (14.1)$$

Durch die leistungsinvariante Transformation wird daraus (vergl. S. ??) die transformierte Induktivität

$$\boxed{L_{Sh} = \frac{3}{2} \cdot L_S} \quad (14.2)$$

Daher wird die Hauptinduktivität an dieser Stelle genau so definiert (Transformation erfolgt erst später).

### 14.1.2 Induktivität Ständer-Erregerwicklung

Wechselinduktivität ist nur von der Rotorstellung abhängig. Aus der Ständerinduktivität  $L_S$  folgt die Wechselinduktivität durch Division mit

$$\mu_f = \frac{w_S \cdot \xi_{S1}}{w_f \cdot \xi_{f1}} \quad (14.3)$$

Z.B.  $\gamma = 0$  1. Strang

$$L_{S1f} = c_d \cdot L_S \cdot \frac{1}{\ddot{u}_f} = c_d \cdot \frac{4 \cdot \mu_0 \cdot l \cdot \tau_p}{\pi^2 \cdot p \cdot \delta'} \cdot \frac{w_S^2 \cdot \xi_{S1}^2}{w_S \cdot \xi_{S1}} \cdot w_f \cdot \xi_{f1}$$

Mit der oben definierten Hauptinduktivität  $L_{Sh}$  und der winkelabhängigen Induktivität ist

$$(L_{sf}) = \underbrace{c_d \cdot \frac{2}{3} \cdot L_{Sh}}_{L_{hd}} \cdot \frac{1}{\ddot{u}_f} \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\gamma - \frac{4\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \quad L_{hd} = c_d \cdot L_{Sh} \quad (14.4)$$

$$(L_{sf}) = \frac{2}{3} \cdot L_{hd} \cdot \frac{1}{\ddot{u}_f} \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \cos(\gamma - 2\pi/3) \\ \cos(\gamma - 4\pi/3) \end{pmatrix} \quad (14.5)$$

### 14.1.3 Induktivität Ständer-Dämpferlängswicklung SD

Entsprechend wird hier

$$(L_{SD}) = c_d \cdot L_S \cdot \frac{1}{\ddot{u}_D} \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \cos(\gamma - 2\pi/3) \\ \cos(\gamma - 4\pi/3) \end{pmatrix} \quad \ddot{u}_D = \frac{w_S \cdot \xi_{S1}}{w_D \cdot \xi_{D1}} \quad (14.6)$$

Anstelle von  $L_S$  wird  $L_{hd}$  eingesetzt

$$(L_{SD}) = \frac{2}{3} \cdot L_{hd} \cdot \frac{1}{\ddot{u}_D} \begin{bmatrix} \cos \gamma \\ \cos(\gamma - 2\pi/3) \\ \cos(\gamma - 4\pi/3) \end{bmatrix}$$

#### 14.1.4 Induktivität Ständer-Dämpferwicklung Quer SQ

Die Dämpferwicklung Q ist um  $90^\circ$  gedreht. ??? gleiche Vorgehensweise. D.h. es wird

$$(L_{SQ}) = \frac{2}{3} \cdot L_{hq} \cdot \frac{1}{\ddot{u}_Q} \begin{bmatrix} \cos \gamma(\gamma + \pi/2) \\ \cos(\gamma + \pi/2 - 2\pi/3) \\ \cos(\gamma + \pi/2 - 4\pi/3) \end{bmatrix} \quad \ddot{u}_Q = \frac{w_S \cdot \xi_{S1}}{w_Q \cdot \xi_{Q1}} \quad (14.7)$$

#### 14.1.5 Induktivität der Ständerwicklungen

Diese sind von der Rotorstellung abhängig

Z.B. wird für Strang 1

$$\begin{aligned} \gamma = 0 & \quad \text{Maximum} & \quad L_{SA} + L_{SB} = c_d \cdot L_S = c_d \cdot \frac{2}{3} \cdot L_{Sh} = \frac{2}{3} \cdot L_{hd} \\ \gamma = \frac{\pi}{2} & \quad \text{Minimum} & \quad L_{SA} - L_{SB} = c_q \cdot L_S = c_q \cdot \frac{2}{3} \cdot L_{Sh} = \frac{2}{3} \cdot L_{hq} \end{aligned}$$

Aus den Beziehungen wird durch Addition bzw. Subtraktion der Gleichungen:

$$\frac{3}{2} \cdot L_{SA} = \frac{1}{2} (L_{hd} + L_{hq}) \quad \text{und} \quad (14.8)$$

$$\frac{3}{2} \cdot L_{SB} = \frac{1}{2} (L_{hd} - L_{hq}) \quad (14.9)$$

Die anderen Definitionen sind:

$$L_{hd} = c_d \cdot L_{Sh} \quad ; \quad L_{hq} = c_q \cdot L_{Sh} \quad ; \quad L_{Sh} = \frac{3}{2} \cdot L_S \quad (14.10)$$

Extremwerte der Wechselinduktivität zwischen zwei Statorsträngen (Luftspaltfeldinduktivität, nur 1. Harmonische berücksichtigt) ausgedrückt in den Hauptinduktivitäten.

$$\text{z.B.:} \quad L_{S1,S2} = -\frac{1}{2} L_{SA} + L_{SB} \cdot \cos(2\gamma - 2\pi/3)$$

$$\gamma = \pi/3: \quad L_{S1,S2} = -\frac{1}{2} L_{SA} + L_{SB} = -\frac{1}{6} \cdot (3L_{hq} - L_{hd})$$

$$\gamma = \pi/3 + \pi/2: \quad L_{S1,S2} = -\frac{1}{2} L_{SA} + L_{SB} = -\frac{1}{6} \cdot (3L_{hd} - L_{hq})$$

Die Stirn- und Nutfeldinduktivitäten ( $S_S$ ) werden gemäß S. ??? angesetzt.

### 3 Arten von Induktivitäten

- 1) Wechselinduktivitäten vom  $\alpha$  abhängig; Position  $L_{Sf}$
- 2) Eigeninduktivitäten vom  $\alpha$  unabhängig, z.B.  $L_{DD}$

3) Induktivitäten mit konstantem Anteil und  $\cos 2\gamma$ , z.B.  $L_{S1,S2}$

Das Drehmoment ist bestimmt durch

$$M_{il} = \frac{1}{2} \cdot p(i)^T \cdot \frac{\partial(L)}{\partial\gamma}(i) \quad (14.11)$$

$$M_{il} = \frac{1}{2} \cdot p(i)^T \frac{\partial}{\partial\gamma} \begin{vmatrix} (L_{SS}) + (S_S) \cdot (i_S) + (L_{Sf}) \cdot i_f + (L_{S0}) \cdot i_D + (L_{SQ}) \cdot i_Q \\ (L_{Sf})^T (i_S) + L_{ff} \cdot i_f + L_{f0} \cdot i_D + 0 \\ (L_{SD})^T (i_S) + L_{fd} \cdot i_f + L_{DD} \cdot i_D \\ (L_{SQ})^T (i_S) + L_{QQ} \cdot i_Q \end{vmatrix} \quad (14.12)$$

$$M_{il} = \frac{p}{2} \frac{\partial}{\partial\gamma} \left\{ \begin{array}{l} (i_S)^T (L_{SS})(i_S) + (i_S)^T (S_S)(i_S) + (i_S)^T (L_{Sf}) \cdot i_f \\ + (i_S)^T (L_{SD}) \cdot i_D + (i_S)^T (L_{SQ}) \cdot i_Q \\ + i_f (L_{Sf})^T (i_S) + L_{ff} \cdot i_f^2 + i_f \cdot L_{fd} \cdot i_D \\ + i_D (L_{SD})^T (i_S) + i_D \cdot L_{fd} \cdot i_f + i_D \cdot L_{DD} \cdot i_D \\ + i_Q (L_{SQ})^T (i_S) + i_Q \cdot L_{QQ} \cdot i_Q \end{array} \right\} \quad (14.13)$$

$(S_S); L_{ff}; L_{DD}; L_{QQ}; L_{fd}$  sind vom  $\gamma$  unabhängig. Deshalb ist  $\frac{\partial}{\partial\gamma} = 0$

Der Rest wird unter Berücksichtigung von  $((a)^T \cdot b)^T = (b)^T \cdot (a)$  zusammengefasst:

$$M_{il} = p \cdot i_f \cdot \frac{\partial(L_{Sf})^T}{\partial\gamma}(i_S) + \frac{1}{2} \cdot p \cdot (i_S)^T \cdot \frac{\partial(L_{SS})}{\partial\gamma} \cdot (i_S) \\ + p \left[ i_D \cdot \frac{\partial(L_{SD})^T}{\partial\gamma}(i_S) + i_Q \cdot \frac{\partial(L_{SQ})^T}{\partial\gamma} \right] \cdot (i_S) \quad (14.14)$$

Die drei Drehmomentterme unterscheiden sich in ihrer Abhängigkeit von den Strömen. Die Dämpferströme  $i_D$  und  $i_Q$  sind im stationären Fall Null.

Frage: Eigenschaften der Maschine, damit Teildrehmomente Null werden

- Dämpferwicklung
- Vollpolmaschine
- Reluktanzmaschine

## 14.2 Transformation des Gleichungssystems.

Die Transformation erfolgt wie bei der ASM.

Für die Spannung gilt

$$\begin{bmatrix} (u_S) \\ u_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_S) & & & \\ & 1/\ddot{u}_f & & \\ & & 1/\ddot{u}_D & \\ & & & 1/\ddot{u}_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\underline{u}_S) \\ u'_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14.15)$$

Strom

$$\begin{bmatrix} (i_S) \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_S) & & & \\ & \ddot{u}_f & & \\ & & \ddot{u}_D & \\ & & & \ddot{u}_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\underline{i}_S) \\ i'_f \\ i'_D \\ i'_Q \end{bmatrix} \quad (14.16)$$

mit

$$(c_S) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e^{-j\gamma_s} & & \\ & e^{j\gamma_s} & \\ & & 1 \end{vmatrix} \quad (14.17)$$

Diese Transformation führt nur dann zu einer winkelunabhängigen Induktivitätsmatrix ( $\underline{L}$ ), wenn die Bezugsachse mit dem magnetisch unsymmetrischen Maschinenteil, dem Rotor, verbunden wird. Deshalb muß gelten

$$\gamma_R = 0 \rightarrow \gamma_S = -\gamma, \quad (C_S)$$

Transformiertes Spannungsgleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_{S1} \\ \underline{u}_{S1}^* \\ u_{S0} \\ u'_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S & & & & & \\ & R_S & & & & \\ & & R_S & & & \\ & & & R'_f & & \\ & & & & R'_D & \\ & & & & & R'_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_{S1} \\ \underline{i}_{S1}^* \\ i_{S0} \\ i'_f \\ i'_D \\ i'_Q \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ -\dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Psi}_{S1} \\ \underline{\Psi}_{S1}^* \\ \Psi'_{S0} \\ \Psi'_f \\ \Psi'_D \\ \Psi'_Q \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{\Psi}_{S1} \\ \underline{\Psi}_{S1}^* \\ \Psi'_{S0} \\ \Psi'_f \\ \Psi'_D \\ \Psi'_Q \end{bmatrix}$$

Durchführung der Transformation

$$(\underline{L}) = (c_u)^{-1} (L) \cdot (c_i)$$

$$(\underline{L}) = \begin{bmatrix} (c_S)^{*T} & & & \\ & \ddot{u}_f & & \\ & & \ddot{u}_D & \\ & & & \ddot{u}_Q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (L_{SS}) & (L_{Sf}) & (L_{S0}) & (L_{Sq}) \\ (L_{Sf})^T & L_{ff} & L_{fD} & 0 \\ (L_{SD})^T & L_{fD} & L_{DD} & 0 \\ (L_{Sq})^T & 0 & 0 & L_{qq} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (c_S) & & & \\ & \ddot{u}_f & & \\ & & \ddot{u}_D & \\ & & & \ddot{u}_Q \end{bmatrix}$$

$$(\underline{L}) = \begin{bmatrix} (c_s)^{*T} \cdot (L_{SS}) \cdot (c_s) & (c_s)^{*T} \cdot (L_{Sf}) \cdot \ddot{u}_f & (c_s)^{*T} \cdot (L_{SD}) \cdot \ddot{u}_D & (c_s)^{*T} \cdot (L_{SQ}) \cdot \ddot{u}_Q \\ \ddot{u}_i \cdot (L_{Sf})^T \cdot (c_s) & \ddot{u}_f \cdot L_{ff} \cdot \ddot{u}_f & \ddot{u}_f \cdot L_{fD} \cdot \ddot{u}_D & 0 \\ \ddot{u}_D \cdot (L_{SD})^T \cdot (c_s) & \ddot{u}_D \cdot L_{fD} \cdot \ddot{u}_f & \ddot{u}_D \cdot L_{DD} \cdot \ddot{u}_D & 0 \\ \ddot{u}_Q \cdot (L_{SQ})^T \cdot (c_s) & 0 & 0 & \ddot{u}_Q \cdot L_{QQ} \cdot \ddot{u}_Q \end{bmatrix}$$

$$(\underline{L}) = \begin{bmatrix} (SS) & (Sf) & (SD) & (SQ) \\ (fS) & (ff) & (fD) & 0 \\ (DS) & (Df) & (DD) & 0 \\ (QS) & 0 & 0 & (QQ) \end{bmatrix}$$

### 14.2.1 Die Untermatrix (fS) ist

$$\begin{vmatrix} e^{j\gamma_s} & & & \\ & e^{-j\gamma_s} & & \\ & & 1 & a & a^2 \\ & & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & a^2 & a \\ & & 1 & 1 & 1 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \gamma \\ \cos(\gamma - 2\pi/3) \\ \cos(\gamma - 4\pi/3) \end{vmatrix} \cdot \frac{2}{3} \cdot L_{hd} \cdot \frac{1}{\ddot{u}_f} \cdot \ddot{u}_f$$

oder

$$\begin{vmatrix} e^{j\gamma_s} & & & \\ & e^{-j\gamma_s} & & \\ & & 1 & a & a^2 \\ & & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & a^2 & a \\ & & 1 & 1 & 1 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \gamma + a \cdot \cos(\gamma - 2\pi/3) + a^2 \cdot \cos(\gamma - 4\pi/3) \\ \cos \gamma + a^2 \cdot \cos(\gamma - 2\pi/3) + a \cdot \cos(\gamma - 4\pi/3) \\ \cos \gamma + \cos(\gamma - 2\pi/3) + \cos(\gamma - 4\pi/3) \end{vmatrix} \cdot \frac{2 \cdot L_{hd}}{\sqrt{3} \cdot 3}$$

#### 1. Zeile

$$\frac{2 \cdot e^{j\gamma_s} \cdot L_{hd}}{\sqrt{3} \cdot 3} \left( \frac{e^{j\gamma} (1 + a \cdot a^2 + a^2 \cdot a) + e^{-j\gamma} (1 + a \cdot a + a^2 \cdot a^2)}{2} \right) = \frac{3 \cdot L_{hd} \cdot 2}{\sqrt{3} \cdot 3 \cdot 2} \cdot e^{j(\gamma_s + \gamma)}$$

Wählt man hier  $\gamma_R = 0$ , d.h.  $\gamma_s = -\gamma$ , wird die erste Zeile vom  $\alpha$  unabhängig. Die Bezugsachse ist mit dem Rotor verbunden.

$$\boxed{L_1 = \frac{L_{hd}}{\sqrt{3}}} \quad (14.18)$$

#### 2. Zeile

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{e^{-j\gamma_s}}{\sqrt{3}} \cdot L_{hd} \left( \frac{e^{j\gamma} (1 + a^2 \cdot a^2 + a \cdot a) + e^{-j\gamma} (1 + a^2 \cdot a + a \cdot a^2)}{2} \right) \text{ oder}$$

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot L_{hd}}{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}} \cdot e^{-j(\gamma_s + \gamma)} = \frac{L_{hd}}{\sqrt{3}} \quad (14.19)$$

#### 3. Zeile

$$\frac{2 \cdot L_{hd}}{\sqrt{3} \cdot 3} \left( \frac{e^{j\gamma} (1 + a^2 + a) + e^{-j\gamma} (1 + a + a^2)}{2} \right) = 0 \quad (14.20)$$

### 14.3 Spaltenvektor (SD)

Der Spaltenvektor  $(SD) = (c_S)^{*T} \cdot (L_{SD}) \cdot \ddot{u}_D$  hat die gleiche Struktur, d.h. man erhält auch die gleiche Induktivität wie zuvor  $\rightarrow \frac{L_{hd}}{\sqrt{3}}; \frac{L_{hd}}{\sqrt{3}}; 0$

$$(c_S)^{*T} \cdot (L_{SQ}) \cdot \ddot{u}_Q = \begin{vmatrix} e^{j\gamma_S} & & & \\ & e^{-j\gamma_S} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos(\gamma + \pi/2) \\ \cos(\gamma + \pi/2 - \pi/3) \\ \cos(\gamma + \pi/2 - 4\pi/3) \end{vmatrix} \cdot \frac{2}{3} \cdot L_{hd} \cdot \frac{\ddot{u}_Q}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (14.21)$$

#### 1. Zeile

$$\frac{2}{3} \cdot L_{hd} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{j\gamma_S} \cdot \left( \frac{e^{j(\gamma+\pi/2)} (1+a \cdot a^2 + a^2 \cdot a) + e^{-j(\gamma+\pi/2)} (1+a \cdot a^2 + a^2 \cdot a^2)}{2} \right)$$

$$e^{j(\gamma_S+\gamma)} \cdot e^{j\pi/2} \cdot \frac{L_{hq}}{\sqrt{3}} = j \frac{L_{hq}}{\sqrt{3}}$$

#### 2. Zeile

$$\frac{2}{3} \cdot L_{hq} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{j\gamma_S} \cdot \left( \frac{e^{j(\gamma+\pi/2)} (1+a^2 \cdot a^2 + a \cdot a) + e^{-j(\gamma+\pi/2)} (1+a^2 \cdot a + a \cdot a)}{2} \right)$$

$$\frac{L_{hq}}{\sqrt{3}} \cdot e^{-j(\gamma_S+\gamma)} \cdot e^{-j\pi/2} = -j \frac{L_{hq}}{\sqrt{3}}$$

3. Zeile wird auch hier Null

#### 14.3.1 Die Untermatrix (Sf) ist

Transformation von  $(SF) = (c_S)^{*T} \cdot (L_{SS}) \cdot (c_S)$

$$\begin{bmatrix} e^{j\gamma_S} & & & \\ & e^{-j\gamma_S} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & a & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} e^{-j\gamma_S} & & & \\ & e^{j\gamma_S} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Aufspaltung in zwei additive Anteile

Auflösung von rechts  $\underline{W} \cdot \underline{Y} \cdot \underline{Z}$  ergibt

$$e^{-j\gamma_S} (A + Ba + Ba^2) \quad e^{j\gamma_S} (A + a^2 \cdot B)$$

#### 14.3.2 Ergebnis der Transformation

$$\begin{bmatrix} \underline{\Psi}_{S1} \\ \underline{\Psi}_{S1}^* \\ \underline{\Psi}_{S0} \\ \underline{\Psi}'_f \\ \underline{\Psi}'_D \\ \underline{\Psi}'_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}L_{SA} + L_{S\sigma} & \frac{3}{2}L_{SB} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}L_{hd} & \frac{1}{\sqrt{3}}L_{hd} & \frac{j}{\sqrt{3}}L_{hq} \\ \frac{3}{2}L_{SB} & \frac{3}{2}L_{SA} + L_{S\sigma} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}L_{hd} & \frac{1}{\sqrt{3}}L_{hd} & \frac{j}{\sqrt{3}}L_{hq} \\ 0 & 0 & L_{S0} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}L_{hd} & \frac{1}{\sqrt{3}}L_{hd} & 0 & L'_{ff} & L'_{fD} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}L_{hd} & \frac{1}{\sqrt{3}}L_{hd} & 0 & L'_{fD} & L'_{DD} & 0 \\ \frac{-j}{\sqrt{3}}L_{hq} & \frac{j}{\sqrt{3}}L_{hq} & 0 & 0 & 0 & L'_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_{S1} \\ \underline{i}_{S1}^* \\ \underline{i}_{S0} \\ \underline{i}'_f \\ \underline{i}'_D \\ \underline{i}'_Q \end{bmatrix}$$

$R'_f = \ddot{u}_f^2 R_f$	$R'_D = \ddot{u}_D^2 R_D$	$R'_Q = \ddot{u}_Q^2 R_Q$
$L'_{ff} = \ddot{u}_f^2 \cdot L_{ff}$	$L'_{DD} = \ddot{u}_D^2 \cdot L_{DD}$	$L'_{QQ} = \ddot{u}_Q^2 \cdot L_{QQ}$
$L'_{fD} = \ddot{u}_f \ddot{u}_D L_{fD}$		

- $L_{S\sigma}$  und  $L_{SA}$  sind definiert wie bei der Asynchronmaschine. Anstelle von  $L_S$  steht  $L_{SA}$ .
- Induktivitäten sind winkelunabhängig
- $\frac{3}{2} \cdot L_{SA} = \frac{L_{hd} + L_{hq}}{2}$
- $\frac{3}{2} \cdot L_{SB} = \frac{L_{hd} - L_{hq}}{2}$
- Vollpoläufer  $L_{SB} = 0$ , da  $D$ - und  $Q$ -Richtungen gleichwertig sind.
- Bei Maschine ohne Dämpferwicklungen fallen die letzten beiden Gleichungen weg.
- Matrix ist hermitisch, was bedeutet, daß  $(\underline{L}) = (\underline{L})^{*T}$  ist.

## 14.4 Inneres Drehmoment der Synchronmaschine

Inneres Drehmoment der SM wird mit den transformierten Größen

$$M_{i1} = \frac{p}{\gamma} \cdot \text{Re} \left\{ (\underline{i})^{*T} \cdot (\underline{E}) \cdot (\underline{\Psi}) \right\}$$

$$M_{i1} = 2 \cdot p \cdot \text{Im} \left\{ \underline{i}_{S1} \cdot \underline{\Psi}_{S1}^* \right\}$$

$$M_{i1} = 2 \cdot p \cdot \text{Im} \left\{ \begin{aligned} & \underline{i}_{S1} \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot L_{SA} + L_{S\sigma} \right) \cdot \underline{i}_{S1}^* + \frac{3}{2} \cdot L_{SB} \cdot \underline{i}_{S1} \\ & + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot L_{hd} \cdot \underline{i}'_f + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot L_{hd} \cdot \underline{i}'_D - j \cdot \frac{L_{hq}}{\sqrt{3}} \cdot \underline{i}'_Q \end{aligned} \right\}$$

$$M_{i1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot p \cdot \text{Im} \left\{ L_{hd} \cdot \underline{i}'_f \cdot \underline{i}_{S1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 \cdot L_{SB} \cdot \underline{i}_{S1}^2 + \left( L_{hd} \cdot \underline{i}'_D - j \cdot \frac{L_{hq}}{\sqrt{3}} \cdot \underline{i}'_Q \right) \cdot \underline{i}_{S1} \right\} \quad (14.22)$$

- Der  $\text{Im}\{\underline{i}_{S1} \cdot \underline{i}_{S1}^*\} = 0$
- $\frac{3}{2} \cdot L_{SB} = \frac{1}{2}(L_{hd} - L_{hq})$  eingesetzt

$$\boxed{M_{i1} = \frac{2 \cdot p}{\sqrt{3}} \cdot \text{Im} \left\{ L_{hd} \cdot \underline{i}'_f \cdot \underline{i}_{S1} + \frac{\sqrt{3}}{2} (L_{hd} - L_{hq}) \cdot \underline{i}_{S1}^2 + (L_{hd} \cdot \underline{i}'_D - jL_{hq} \cdot \underline{i}'_Q) \cdot \underline{i}_{S1} \right\}} \quad (14.23)$$

- 1. Term:** Synchrones Nutzmoment, vom Polrad- und Stator Drehfeld erzeugt.
- 2. Term:** Reaktionsmoment, vom Stator Drehfeld allein erzeugt; tritt nur auf, wenn  $L_{hd} \neq L_{hq}$ , und ermöglicht den Bau von Reaktions- oder Reluktanzmaschinen.
- 3. Term:** Asynchrones oder Dämpfungsmoment, vom Stator Drehfeld und dem Feld der Dämpferströme erzeugt; tritt im stationären symmetrischen Betrieb mit sinusförmigen Größen nicht auf, da  $\underline{i}'_D = 0$ ,  $\underline{i}'_Q = 0$  ist.

----- zusatzblatt -----

$$\boxed{M_{i1} = 2 \cdot p \cdot \text{Im} \left\{ \underline{i}_{S1} \cdot \underline{\Psi}_{S1}^* \right\}} \quad (14.24)$$

Mit  $R_s = 0$  wird aus der 2. Zeile

$$\underline{u}_{S1}^* = -j\omega_s \cdot \underline{\Psi}_{S1}^* \quad \text{oder} \quad \underline{\Psi}_{S1}^* = \frac{\underline{u}_{S1}^*}{-j\omega_s} = j \frac{\underline{u}_{S1}^*}{\omega_s}$$

$$M_{i1} = \frac{2p}{\omega_s} \cdot \text{Im} \left\{ j \underline{i}_{S1} \cdot \underline{\Psi}_{S1}^* \right\} \quad (14.25)$$

$$\underline{i}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} (I_d + j I_q)$$

$$\underline{u}_{S1} = j \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot u_s \cdot e^{-j\vartheta}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot u_s (\sin \vartheta + j \cos \vartheta)$$

$$M_{i1} = \frac{2p}{\omega} \cdot \text{Im} \left\{ j \underline{i}_{S1} \cdot \underline{u}_{S1}^* \right\}$$

$$= \frac{3p}{\omega} \cdot \text{Im} \left\{ u_s (I_d + j I_q) (\cos \vartheta + j \sin \vartheta) \right\}$$

$$= \frac{3p}{\omega} \cdot \text{Im} \left\{ u_s (I_d \cdot \cos \vartheta - I_q \sin \vartheta) + j u_s (I_q \cdot \cos \vartheta + I_d \sin \vartheta) \right\}$$

$$= \frac{3p \cdot u_s}{\omega} (I_d \cdot \sin \vartheta - I_q \cos \vartheta)$$

$$= \frac{3p \cdot u_s}{\omega} \left( \frac{u_s \cos \vartheta - u_p}{X_d} \cdot \sin \vartheta + \frac{-u_s \sin \vartheta}{X_q} \cdot \cos \vartheta \right)$$

$$= \frac{3p \cdot u_S}{\omega} \left\{ \frac{-u_p \cdot \sin \vartheta}{X_d} + u_S \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \left( \frac{1}{X_d} - \frac{1}{X_q} \right) \right\}$$

$$\boxed{M_{il} = \frac{-3 \cdot p \cdot u_S}{\omega} \left\{ \frac{u_p \cdot \sin \vartheta}{X_d} + \frac{u_S \cdot \sin 2\vartheta}{2} \cdot \frac{(X_d - X_q)}{X_d \cdot X_q} \right\}} \quad (14.26)$$

----- Ende Zusatzblatt -----

### Herleitung des Drehmoments für $R_S = 0$ im stationären Betrieb

(synchrones Moment)

$$\frac{d\Psi_{S1}}{dt} = 0 \quad ; \quad \dot{\gamma} = \omega_S \quad ; \quad M_{il} = 2p \operatorname{Im} \{ \underline{i}_{S1} \cdot \underline{\Psi}_{S1}^* \}$$

Aus der 2. Glg. der Spannungsgleichung erhält man

$$\underline{u}_{S1}^* = -j \cdot \omega_S \cdot \underline{\Psi}_{S1}^* \quad \text{eingesetzt}$$

$$M_{il} = \frac{2 \cdot p}{\omega_S} \cdot \operatorname{Im} \{ j \underline{i}_{S1} \cdot \underline{u}_{S1}^* \}$$

Aus dem Zeigerdiagramm kann man für den Spannungsraumzeiger schreiben

$$\underline{u}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_d + j u_q) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{U}_S$$

Der komplexe Effektivwert kann in dem neuen Koordinatensystem  $\operatorname{Re}'$  und  $\operatorname{Im}'$  ermittelt werden (siehe ???)

$$\underline{U}_S = j \cdot U_S \cdot e^{-j\vartheta} \quad \rightarrow \quad \underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot j \cdot U_S \cdot (\cos \vartheta - j \sin \vartheta)$$

Der Stromraumzeiger ist

$$\underline{i}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (i_d + j i_q) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{I}_S$$

Aus der Spannungsgleichung

$$U_S = (X_d \cdot I_d + j X_q \cdot I_q + U_p) \cdot e^{j\vartheta}$$

$$U_S \cdot \cos \vartheta - j U_S \cdot \sin \vartheta - U_p = X_d \cdot I_d + j X_q \cdot I_q$$

Aus Real- und Imaginärteil folgt:  $I_d = \frac{U_S \cdot \cos \vartheta - U_p}{X_d}$  und  $I_q = \frac{-U_S \cdot \sin \vartheta}{X_q}$

Wobei  $\underline{I}_S = I_d + j I_q$  ist.

Eingesetzt

$$M_{il} = \frac{2 \cdot p}{\omega_S} \cdot \operatorname{Im} \left\{ j (i_d + j i_q) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (u_d - j u_q) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$= \frac{p}{\omega_S} \cdot \operatorname{Im} \left\{ j (i_d \cdot u_d + i_q \cdot u_q) - (i_q \cdot u_d - i_d \cdot u_q) \right\}$$

$$\boxed{M_{il} = \frac{p}{\omega_s} (i_d \cdot u_d + i_q \cdot u_q)} \quad (14.27)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (u_d + j u_q) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot (U_s \cdot \sin \vartheta + j U_s \cdot \cos \vartheta)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (i_d + j i_q) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \left( \frac{U_s \cdot \cos \vartheta - U_p}{X_d} \right) + j \left( \frac{-U_s \cdot \sin \vartheta}{X_q} \right)$$

Eingesetzt wird dann

$$\begin{aligned} M_{il} &= \frac{p}{\omega_s} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \left( \frac{(U_s \cdot \cos \vartheta - U_p)}{X_d} \cdot U_s \cdot \sin \vartheta + \frac{-U_s \cdot \sin \vartheta}{X_q} \cdot U_s \cdot \cos \vartheta \right) \\ &= - \frac{3 \cdot p}{\omega_s} \left( \frac{U_p \cdot U_s \cdot \sin \vartheta}{X_d} + U_s^2 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \left[ \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right] \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{M_{il} = - \frac{3 \cdot p}{\omega_s} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{X_{hd} \cdot i'_f}{X_d} \cdot U_s \cdot \sin \vartheta + \frac{X_d - X_q}{2 \cdot X_d \cdot X_q} \cdot U_s^2 \cdot \sin 2\vartheta \right)} \quad (14.28)$$

BILD

Bild 14.3: Def. der Winkel



## 10 Synchronmaschine

### 10.1 Stationärer Betrieb am starren symmetrischen Netz

Die Bedingungen für den stationären Betrieb sind:

- Statorspannung ist konstant
- Winkelgeschwindigkeit konstant  $\gamma = \omega_s t + \gamma_0$ ;  $\gamma_0$  ist ein beliebiger Anfangswinkel zur Zeit  $t=0$ .
- Bezugssystem ist so gewählt, daß  $\gamma_R = 0$  und  $\gamma_S = -\gamma$  ist. Das bedeutet, daß das Bezugssystem synchron mit dem Rotor rotiert.

$$\underline{u}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (u_{S1} + a u_{S2} + a^2 u_{S3}) \cdot e^{-j\gamma_s} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot U_S \cdot e^{-j\gamma_0}$$

Der Spannungszeiger wird hier zur Vereinfachung der weiteren Rechnung in die reelle Achse gelegt.

- Erregerspannung sei konstant

Unter diesen Bedingungen werden auch die stationären Lösungen des Systems konstant. Nach der komplexen Rechnung kann man einen Ansatz für den Stromraumzeiger machen

$$\underline{i}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot I_S \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{-j\gamma_0} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{I}_S \cdot e^{-j\gamma_0}$$

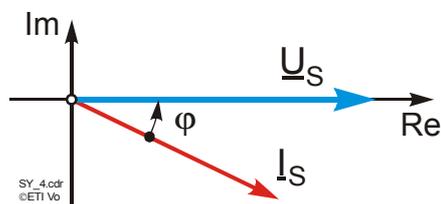


Bild 10.1: Definition des Phasenwinkels zwischen Ständerstrom und Ständerspannung

#### 10.1.1 Spannungsgleichung

Aus der 1. Zeile der Systemgleichungen erhält man die Spannungsgleichung. Die Gleichung wurde schon durch den Faktor  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  dividiert.

$$U_S e^{-j\gamma_0} = R_S \underline{I}_S e^{-j\gamma_0} + j\omega_s \left[ \frac{L_{hd} + L_{hq}}{2} + L_{S\sigma} \right] \underline{I}_S e^{-j\gamma_0} + j\omega_s \left[ \frac{L_{hd} - L_{hq}}{2} \right] \underline{I}_S^* e^{j\gamma_0} + j\omega_s \frac{\sqrt{2}}{3} L_{hd} \dot{i}_f$$

Den vom Erregerstrom abhängige Anteil der Spannung (Betrag) nennt man die Polradspannung  $U_p$

$$U_p = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot X_{hd} \cdot \dot{i}_f$$

Definiert man als Polradwinkel  $\vartheta$  den Winkel zwischen der von dem Polrad induzierten Spannung  $U_p$  und der Ständerspannung  $U_S$ , dann gilt (Bild 10.2)

$$\gamma_0 + \frac{\pi}{2} = \vartheta \quad \text{oder} \quad \gamma_0 = \vartheta - \frac{\pi}{2}$$

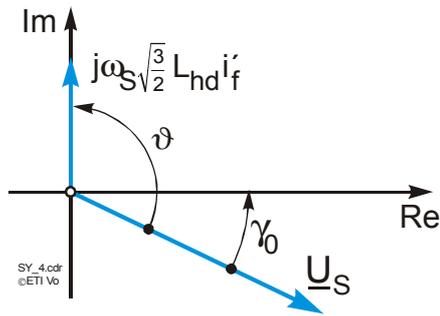


Bild 10.2: Definition des Polradwinkels zwischen Polradspannung und Ständer-  
spannung

Der Spannungsraumzeiger und die Spannungsgleichung werden mit dieser Defini-  
tion:

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot U_S \cdot e^{-j\gamma_0} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot U_S \cdot e^{-j\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right)} = j \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot U_S \cdot e^{-j\vartheta} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot U_S \cdot j \cdot (\cos \vartheta - j \sin \vartheta)$$

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot (U_S \sin \vartheta + j U_S \cdot \cos \vartheta)$$

Für die Spannungsgleichung erhält man

$$U_S = R_S \cdot I_S + j \frac{X_d + X_q}{2} \cdot \underline{I}_S - j \frac{X_d - X_q}{2} \cdot \underline{I}_S^* \cdot e^{2j\gamma_0} + j \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} X_{hd} i_f \cdot e^{j\gamma_0}$$

Zwischenrechnung um in die Terme  $\gamma_0$  einzusetzen:

$$e^{2j\gamma_0} = e^{2j\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right)} = e^{2j\vartheta} \cdot e^{-j\pi} = -e^{2j\vartheta} \quad \text{und}$$

$$j \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} X_{hd} i_f \cdot e^{j\gamma_0} = U_P \cdot j e^{j\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right)} = U_P \cdot j e^{j\vartheta} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = U_P \cdot e^{j\vartheta} = \underline{U}_P$$

Wie in der Definition oben festgelegt, ist der Zeiger der Polradspannung um den Pol-  
radwinkel gegenüber der Spannung, die in der reellen Achse liegt, gedreht.

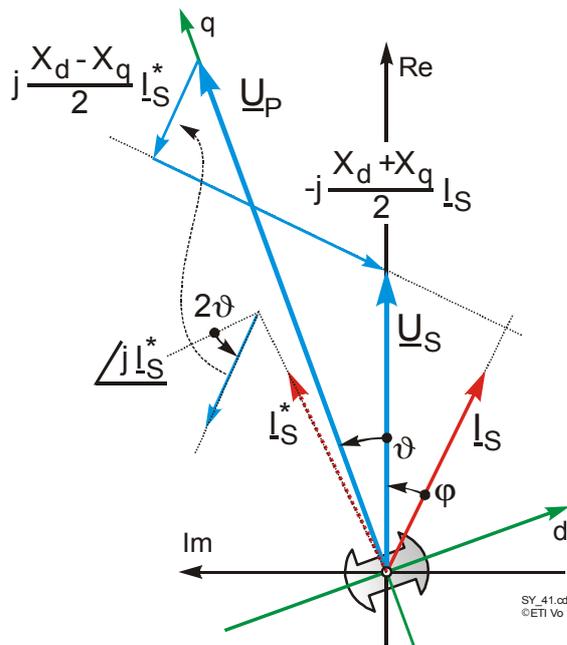
Die Spannungsgleichung ist damit:

$$U_S = R_S \cdot I_S + j \frac{X_d + X_q}{2} \cdot \underline{I}_S - j \frac{X_d - X_q}{2} \cdot \underline{I}_S^* \cdot e^{j2\vartheta} + \underline{U}_P$$

wobei  $\underline{U}_P = U_P \cdot e^{j\vartheta} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot X_{hd} \cdot i_f \cdot e^{j\vartheta}$  der Zeiger der Polradspannung ist.

### 10.1.2 Zeigerdiagramm der Schenkelpol-Synchronmaschine

Zum Zeichnen des Zeigerdiagramms der Schenkelpol-Synchronmaschine können  
verschiedene Formen der Spannungsgleichung benutzt werden.



1.  $\underline{U}_S$  bzw.  $U_S$  in die reelle Achse
2.  $\underline{I}_S$  mit  $\varphi$  antragen
3.  $\perp$  auf  $\underline{I}_S$   $-j \frac{X_d + X_q}{2} \underline{I}_S$  an  $U_S$  antragen
4.  $j \underline{I}_S^*$  konstruieren
5. Drehung der Richtung von  $j \underline{I}_S^*$  um  $2\vartheta$
6.  $j \frac{X_d - X_q}{2} \underline{I}_S^*$  antragen  $U_P$
7. Summe ergibt Polradspannung

Bild 10.3: Definition der Winkel und Stromkomponenten

### 10.1.3 Drehmomentengleichung

## 10.2 Zerlegung des Ständerstromes in d- und q-Komponenten

Für die weitere Betrachtung ist es günstig, den Stromzeiger in Richtung der Polradspannung und senkrecht dazu aufzuspalten (Bild 10.4).

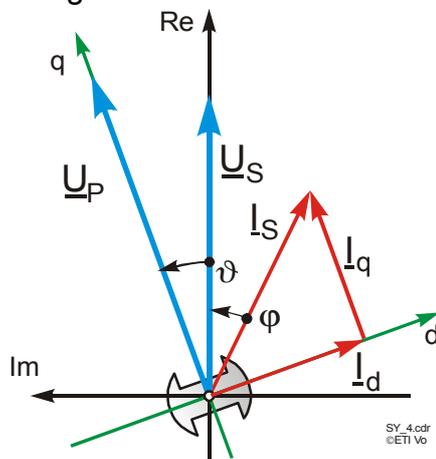


Bild 10.4: Definition der Winkel und Stromkomponenten  $\underline{I}_d$  und  $\underline{I}_q$

Den Stromzeiger kann man in Komponenten in d- und q-Richtung zerlegen. Die Stromkomponenten sind im Koordinatensystem  $\{Re; Im\}$

$$\underline{I}_d = -j \cdot I_d \cdot e^{j\vartheta} \quad \text{und} \quad \underline{I}_q = I_q \cdot e^{j\vartheta}$$

Die Summe der Stromkomponenten ist

$$\underline{I}_S = \underline{I}_d + \underline{I}_q = (-j I_d + I_q) \cdot e^{j\vartheta} = -j \cdot (I_d + j I_q) \cdot e^{j\vartheta}$$

Aus dem Stromraumzeiger wird mit dieser Definition

$$\underline{i}_{S1} = j \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{I}_S \cdot e^{-j\vartheta} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot j \cdot (-j) \cdot (I_d + jI_q) \cdot e^{j\vartheta} e^{-j\vartheta}$$

$$\underline{i}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot (I_d + jI_q)$$

Setzt man diese Stromkomponenten in die Spannungsgleichung ein, wird daraus:

$$U_S = R_S \cdot \underline{I}_S + j \frac{X_d + X_q}{2} \cdot (I_q - jI_d) \cdot e^{j\vartheta} - j \frac{X_d - X_q}{2} \cdot (I_q + jI_d) \cdot e^{-j\vartheta} \cdot e^{j2\vartheta} + \underline{U}_P$$

ausmultipliziert und sortiert

$$U_S = R_S \cdot \underline{I}_S + \left\{ \begin{array}{l} jX_d \cdot I_q + X_d \cdot I_d + jX_q \cdot I_q + X_q \cdot I_d \\ -jX_d \cdot I_q + X_d \cdot I_d + jX_q \cdot I_q - X_q \cdot I_d \end{array} \right\} \cdot \frac{e^{j\vartheta}}{2} + \underline{U}_P$$

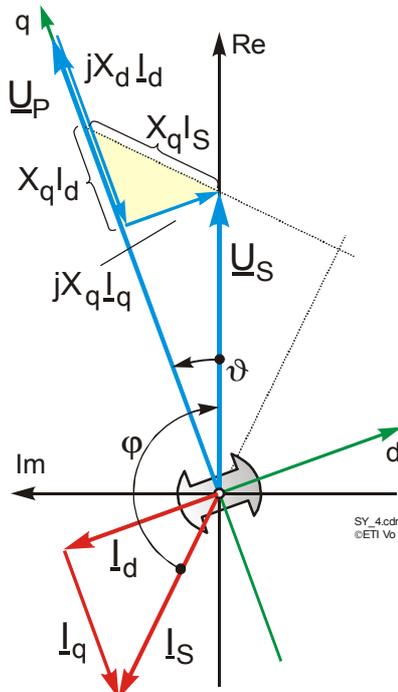
$$U_S = R_S \cdot \underline{I}_S + \{X_d \cdot I_d + jX_q \cdot I_q + U_P\} \cdot e^{j\vartheta}$$

Bei dieser Darstellung der Spannungsgleichung ist zu beachten, daß  $I_d$  und  $I_q$  die Komponenten und nicht die Zeiger sind. Die Zeiger  $\underline{I}_d$  und  $\underline{I}_q$  können eingeführt werden, indem man ausmultipliziert und die Definition der Stromkomponenten beachtet.

$$\begin{aligned} U_S &= R_S \cdot \underline{I}_S + X_d \cdot I_d \cdot e^{j\vartheta} + jX_q \cdot I_q \cdot e^{j\vartheta} + U_P \cdot e^{j\vartheta} \\ &= R_S \cdot \underline{I}_S + (-j \cdot j) X_d \cdot I_d \cdot e^{j\vartheta} + jX_q \cdot I_q \cdot e^{j\vartheta} + U_P \cdot e^{j\vartheta} \end{aligned}$$

$$U_S = R_S \cdot \underline{I}_S + jX_d \cdot \underline{I}_d + jX_q \cdot \underline{I}_q + \underline{U}_P$$

Diese Form der Spannungsgleichung ist gut geeignet um das Zeigerdiagramm nach Bild 10.5 zu zeichnen.



1.  $\underline{U}_S$  bzw.  $U_S$  in die reelle Achse
2.  $\underline{I}_S$  mit  $\varphi$  antragen
3. Strom in die Komponenten zerlegen
4.  $jX_q \cdot \underline{I}_q \perp$  zu  $\underline{I}_q$  antragen
5.  $jX_d \cdot \underline{I}_d \perp$  zu  $\underline{I}_d$  antragen
6. Summe gibt Polradspannung  $\underline{U}_P$

Bild 10.5: Zeigerdiagramm der Schenkelpol-Synchronmaschine

### 10.2.1 Drehmomentgleichung

Siehe S 87.

Aus der 2. Gl. der transformierten Spannungsgleichung erhält man

$$\underline{u}_{S1}^* = -j\omega_S \cdot \Psi_{S1}^* \quad \text{oder} \quad \Psi_{S1}^* = \frac{j \cdot \underline{u}_{S1}^*}{\omega_S}$$

$$M_{il} = 2p \cdot \text{Im}\{\underline{i}_{S1} \cdot \underline{\Psi}_{S1}^*\} = \frac{2p}{\omega_S} \cdot \text{Im}\{j \cdot \underline{i}_{S1} \cdot \underline{u}_{S1}^*\}$$

$$\underline{i}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (i_d + ji_q) \quad \text{und} \quad \underline{u}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (u_d + ju_q)$$

Mit den Definitionen für den Spannungsraumzeiger erhält man für die Drehmomentgleichung

$$\begin{aligned} M_{il} &= 2p \cdot \text{Im}\{\underline{i}_{S1} \cdot \underline{\Psi}_{S1}^*\} = \frac{2p}{\omega_S} \cdot \text{Im}\left\{j \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(i_d + ji_q) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(u_d - ju_q)\right\} \\ &= \frac{p}{\omega_S} \cdot \text{Im}\{j \cdot (i_d u_d + i_q u_q) - (i_q u_d - i_d u_q)\} \end{aligned}$$

$$\boxed{M_{il} = \frac{p}{\omega_S} \cdot (i_d \cdot u_d + i_q \cdot u_q)} \quad (i_D=0 ; i_Q=0)$$

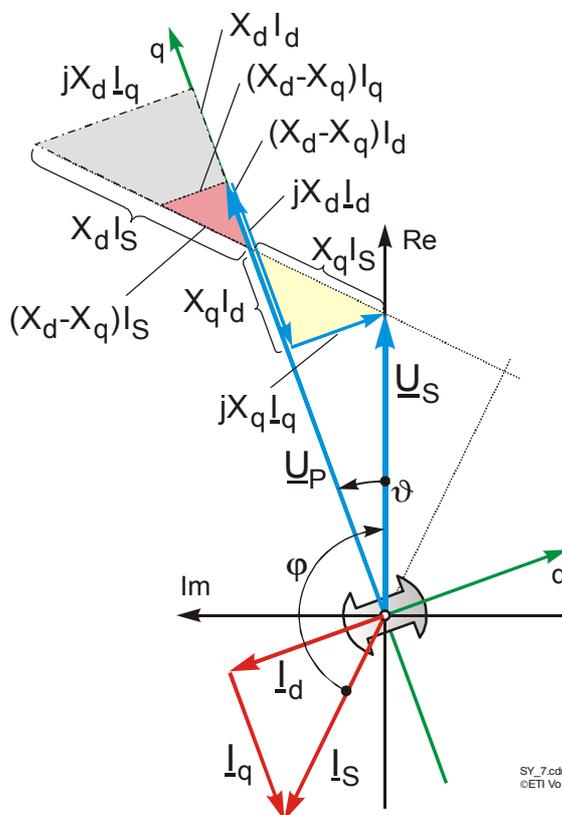


Bild 10.6: Zeigerdiagramm der Schenkelpol-Synchronmaschine

Andere Umformung der Spannungsgleichung:

Es wird  $\pm j \frac{X_d + X_q}{2} \cdot \underline{I}_S$  in die Spannungsgleichung eingefügt und neu sortiert.

$$U_S = R_S \cdot I_S + j \frac{X_d + X_q}{2} \cdot \underline{I}_S - j \frac{X_d - X_q}{2} \cdot \underline{I}_S^* \cdot e^{j\vartheta} + \underline{U}_P$$

## 10.3 Drehmomentgleichungen

### 10.3.1 Weitere Form der Drehmomentgleichung

Aus der Spannungsgleichung wird:

$$U_S = R_S \cdot \underline{I}_S + \{X_d \cdot I_d + jX_q \cdot I_q + U_P\} \cdot e^{j\vartheta}$$

$$U_S \cdot e^{-j\vartheta} = U_S \cdot \cos \vartheta - jU_S \cdot \sin \vartheta = X_d \cdot I_d + jX_q \cdot I_q + U_P$$

Real- und Imaginärteil in der Spannungsgleichung müssen jeweils gleich sein.

$$U_S \cdot e^{-j\vartheta} = U_S \cdot \cos \vartheta - jU_S \cdot \sin \vartheta = X_d \cdot I_d + jX_q \cdot I_q + U_P$$

$$I_d = \frac{U_S \cdot \cos \vartheta - U_P}{X_d} \quad \text{und} \quad I_q = \frac{-U_S \cdot \sin \vartheta}{X_q}$$

Damit ist der Stromraumzeiger

$$\underline{i}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (i_d + j i_q) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \left( \frac{U_S \cdot \cos \vartheta - U_P}{X_d} + j \frac{-U_S \sin \vartheta}{X_q} \right)$$

Nun sind noch die Komponenten des Spannungsraumzeigers zu bestimmen:

$$\underline{U}_S = j \cdot U_S \cdot e^{-j\vartheta}$$

$$\underline{u}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (u_d + j u_q) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{U}_S = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot j \cdot U_S \cdot e^{-j\vartheta} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot U_S \cdot j \cdot (\cos \vartheta - j \sin \vartheta)$$

$$\underline{u}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (u_d + j u_q) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot (U_S \sin \vartheta + j U_S \cdot \cos \vartheta)$$

Die Komponenten in die Drehmomentgleichung eingesetzt ergibt

$$M_{i1} = \frac{p}{\omega_s} \cdot (i_d \cdot u_d + i_q \cdot u_q) = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot p}{\omega_s} \cdot \left( \frac{U_S \cdot \cos \vartheta - U_P}{X_d} \cdot U_S \sin \vartheta + \frac{-U_S \sin \vartheta}{X_q} \cdot U_S \cdot \cos \vartheta \right)$$

$$M_{i1} = -\frac{3 \cdot p}{\omega_s} \cdot \left( \frac{U_S \cdot U_P \sin \vartheta}{X_d} + U_S^2 \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \left[ \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right] \right)$$

$$M_{i1} = -\frac{3 \cdot p}{\omega_s} \cdot \left( \frac{U_S \cdot U_P \sin \vartheta}{X_d} + U_S^2 \sin 2\vartheta \cdot \left[ \frac{X_d - X_q}{2 \cdot X_d \cdot X_q} \right] \right)$$

$$\underline{U}_S = j \cdot U_S \cdot e^{-j\vartheta}$$

$$\underline{u}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (u_d + ju_q) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{U}_S = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot j \cdot U_S \cdot e^{-j\vartheta} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot U_S \cdot j \cdot (\cos \vartheta - j \sin \vartheta)$$

$$j \cdot U_S \cdot e^{-j\vartheta}$$

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot U_S \cdot (\sin \vartheta + j \cos \vartheta)$$

$$\underline{i}_{S1}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (i_d - ji_q) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{I}_S$$

$$\underline{U}_S = j \cdot U_S \cdot e^{-j\vartheta}$$

$$\underline{u}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (u_d + ju_q) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{U}_S = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot j \cdot U_S \cdot e^{-j\vartheta} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot U_S \cdot j \cdot (\cos \vartheta - j \sin \vartheta)$$

$$j \cdot U_S \cdot e^{-j\vartheta}$$

$$\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot U_S \cdot (\sin \vartheta + j \cos \vartheta)$$

Aus der Spannungsgleichung wird:

$$U_S = R_S \cdot \underline{I}_S + \{X_d \cdot I_d + jX_q \cdot I_q + U_P\} \cdot e^{j\vartheta}$$

$$U_S \cdot e^{-j\vartheta} = U_S \cdot \cos \vartheta - jU_S \cdot \sin \vartheta = X_d \cdot I_d + jX_q \cdot I_q + U_P$$

Real- und Imaginärteil in der Spannungsgleichung müssen jeweils gleich sein.

$$U_S \cdot e^{-j\vartheta} = U_S \cdot \cos \vartheta - jU_S \cdot \sin \vartheta = X_d \cdot I_d + jX_q \cdot I_q + U_P$$

$$I_d = \frac{U_S \cdot \cos \vartheta - U_P}{X_d} \quad \text{und} \quad I_q = \frac{-U_S \cdot \sin \vartheta}{X_q}$$

## 16 Synchronmaschine Regelstrecke

### 16.1 xy

Ständerspannungsgleichung

$$\underline{u}_{S1} = R_S \cdot \underline{i}_{S1} + \dot{\underline{\psi}}_{h1} + \dot{\underline{\psi}}_{S\sigma}$$

Im ständerfesten Bezugssystem ( $\gamma_S = 0$ )

Stromraumzeiger

$$\underline{i}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (i_{S\alpha} + j i_{S\beta}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (i_{Sd} + j i_{Sq}) \cdot e^{j\gamma}$$

Spannungsgl. In Komponenten

$$u_{S\alpha} = R_S \cdot i_{S\alpha} + \dot{\psi}_{h\alpha} + L_{S\sigma} \cdot \dot{i}_{S\alpha}$$

$$u_{S\beta} = R_S \cdot i_{S\beta} + \dot{\psi}_{h\beta} + L_{S\sigma} \cdot \dot{i}_{S\beta}$$

Definition der Ständerzeitkonstanten  $\tau_S = \frac{L_{S\sigma}}{R_S}$  erhält man aus der Spannungsgleichung.

$$\frac{u_{S\alpha} - \dot{\psi}_{h\alpha}}{R_S} = i_{S\alpha} + \tau_S \cdot \dot{i}_{S\alpha}$$

$$\frac{u_{S\beta} - \dot{\psi}_{h\beta}}{R_S} = i_{S\beta} + \tau_S \cdot \dot{i}_{S\beta}$$

Der Hauptfluss kann im ständerfesten und im rotorfesten Bezugssystem dargestellt werden.

$$\underline{\psi}_{h1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{hd} + j \psi_{hq}) \cdot e^{j(\gamma+\gamma_S)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{h\alpha} + j \psi_{h\beta}) \cdot e^{j\gamma_S}$$

Oder

$$\psi_{h\alpha} + j \psi_{h\beta} = (\psi_{hd} + j \psi_{hq}) \cdot e^{j\gamma}$$

Das ist eine Koordinatentransformation oder Drehung um den  $\sphericalangle \gamma$ .

Bild 16.1: Def. der Winkel

Für die Ständerströme kann man einen ähnlichen Ansatz machen

$$\underline{i}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (i_{Sd} + j i_{Sq}) \cdot e^{j(\gamma+\gamma_S)} = \frac{1}{2} \cdot (i_{S\alpha} + j i_{S\beta}) \cdot e^{j\gamma_S}$$

woraus  $i_{Sd} + j i_{Sq} = (i_{S\alpha} + j i_{S\beta}) \cdot e^{-j\gamma}$  folgt

D.h. die Ströme im  $d-q$ -System können aus den Strömen im  $\alpha\beta$ -System berechnet werden  $\rightarrow$  Koordinatentransformation mit negativem Winkel.

In Komponenten

$$\begin{vmatrix} i_{Sd} \\ i_{Sq} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_{S\alpha} \\ i_{S\beta} \end{vmatrix}$$

### SKIZZE

Bild 16.2: Def. der Winkel

Nun sind die Ständerströme im polradorientierten  $d-q$ -System bekannt. Aus den Strömen sind nun die Flüsse zu bestimmen. Dies kann vollständig im  $d-q$ -System erfolgen. Zunächst wird die Dämpferwicklung berücksichtigt.

Aus der Spannungsgleichung kann man nach den Dämpferströmen auflösen

$$i''_{Dd} = -\frac{1}{R''_{Dd}} \cdot \dot{\Psi}_{Dd} \quad \text{und} \quad i''_{Dq} = -\frac{1}{R''_{Dq}} \cdot \dot{\Psi}_{Dq}$$

Aus der Flussverkettung

$$\Psi''_{Dd} = L'_{hd} \cdot i_d + L'_{hd} \cdot i''_t + L''_{DD} \cdot i''_{Dd} = L'_{hd} (i_d + i''_t + i''_{Dd}) + L''_{D\sigma d} \cdot i''_{Dd}$$

entsprechend

$$\Psi''_{Dq} = L'_{hq} \cdot (i_q + i''_{Dq}) + L''_{D\sigma q} \cdot i''_{Dq} = L'_{hq} \cdot i''_{\mu q} + L''_{D\sigma q} \cdot i''_{Dq}$$

Die Ableitung der Flüsse kann man nun in die Gleichung für die Dämpferströme einsetzen und erhält

$$i''_{Dd} = -\frac{1}{R''_{Dd}} \cdot \overbrace{\left( L'_{hd} \cdot \dot{i}_{\mu d} + L''_{D\sigma d} \cdot i''_{Dd} \right)}^{\Psi_{Dd}} \quad \text{sowie}$$

$$i''_{Dq} = -\frac{1}{R''_{Dq}} \cdot \left( L'_{hq} \cdot \dot{i}_{\mu q} + L''_{D\sigma q} \cdot i''_{Dq} \right)$$

oder

$$-\frac{L'_{hd}}{R''_{Dd}} \cdot \dot{i}_{\mu d} = i''_{Dd} + \tau_{Dd} \cdot \dot{i}''_{Dd} \quad \text{sowie}$$

$$-\frac{L'_{hq}}{R''_{Dq}} \cdot \dot{i}_{\mu q} = i''_{Dq} + \tau_{Dq} \cdot \dot{i}''_{Dq}$$

Wenn die Maschine permanenterregt ist  $\Rightarrow i''_t = \text{konst.}$





## 16 Synchronmaschine Regelstrecke

### 16.1 Synchronmaschine als Regelstrecke

Für die Steuerung der Synchronmaschine ist es erforderlich, die internen Flüsse bzw. Ströme zu kennen.

Inversion der Induktivitätsmatrix von S. ?? unter der Annahme, dass keine Nullkomponenten auftreten (3.Gl. entfällt):

Da die 2. und die 6. Gl. von den übrigen entkoppelt sind, können sie separat behandelt werden.

Definition von Streuziffern:

$$L_d = (1 + \sigma_d) L'_{hd} \quad L_q = (1 + \sigma_q) L_{hq}$$

$$L''_{ff} = (1 + \sigma_f) L'_{hd} \quad L''_{QQ} = (1 + \sigma_Q) L_{hq}$$

$$L''_{DD} = (1 + \sigma_D) L'_{hd}$$

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i''_f \\ i''_D \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma_{dfD} L'_{hd}} \begin{bmatrix} \sigma_f + \sigma_D + \sigma_f \sigma_D & -\sigma_D & -\sigma_f \\ -\sigma_D & \sigma_d + \sigma_D + \sigma_d \sigma_D & -\sigma_d \\ -\sigma_f & -\sigma_d & \sigma_d + \sigma_f + \sigma_d \sigma_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi''_f \\ \Psi''_D \end{bmatrix}$$

mit  $\sigma_{dfD} = \sigma_d \sigma_f + \sigma_d \sigma_D + \sigma_f \sigma_D + \sigma_d \sigma_f \sigma_D$

Entsprechend erhält man in der Q-Achse

Flüsse lassen sich in Ströme umrechnen

$$\begin{bmatrix} i_q \\ i''_Q \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma_{qQ} L_{hq}} \begin{bmatrix} 1 + \sigma_Q & -1 \\ -1 & 1 + \sigma_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_q \\ \Psi''_Q \end{bmatrix}$$

mit  $\sigma_{qQ} = \sigma_q + \sigma_Q + \sigma_q \sigma_Q$

S. ?? zeigt ein Strukturbild der am starren Netz arbeitenden Drehstromsynchronmaschine; Erregerspannung und Lastmoment sind die einzigen Eingangsgrößen. Da in dieser reellen Struktur 7 Integratoren enthalten sind, handelt es sich um ein (nichtlineares) System 7.Ordnung; also gegenüber der Asynchronmaschine eine um zwei höhere Ordnung. Die Gründe dafür sind, dass bei der Synchronmaschine die Erregerwicklung hinzukommt und die Rotorpositionswinkel (oder Polradwinkel) das Verhalten bestimmt, während bei der Asynchronmaschine nur  $\dot{\gamma}$  eine Rolle spielt (vergl. S. ??). Bevor die Simulation gestartet wird, müssen für das zu behandelnde Problem die Eingangsgrößen und die Anfangswerte für sämtliche Integrationen bekannt sein.

Bild 16.1: Def. der Winkel





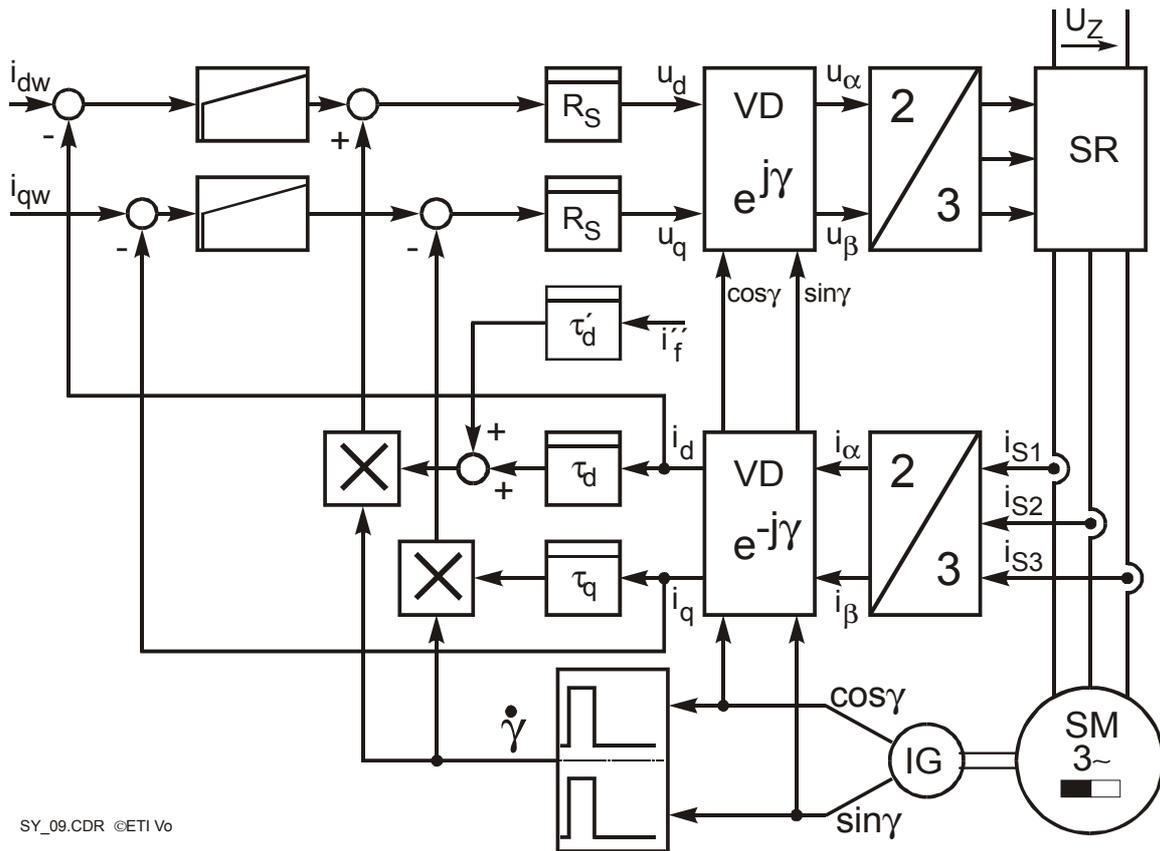


Bild 21.2: Struktur zur Rotorflußorientierten Steuerung

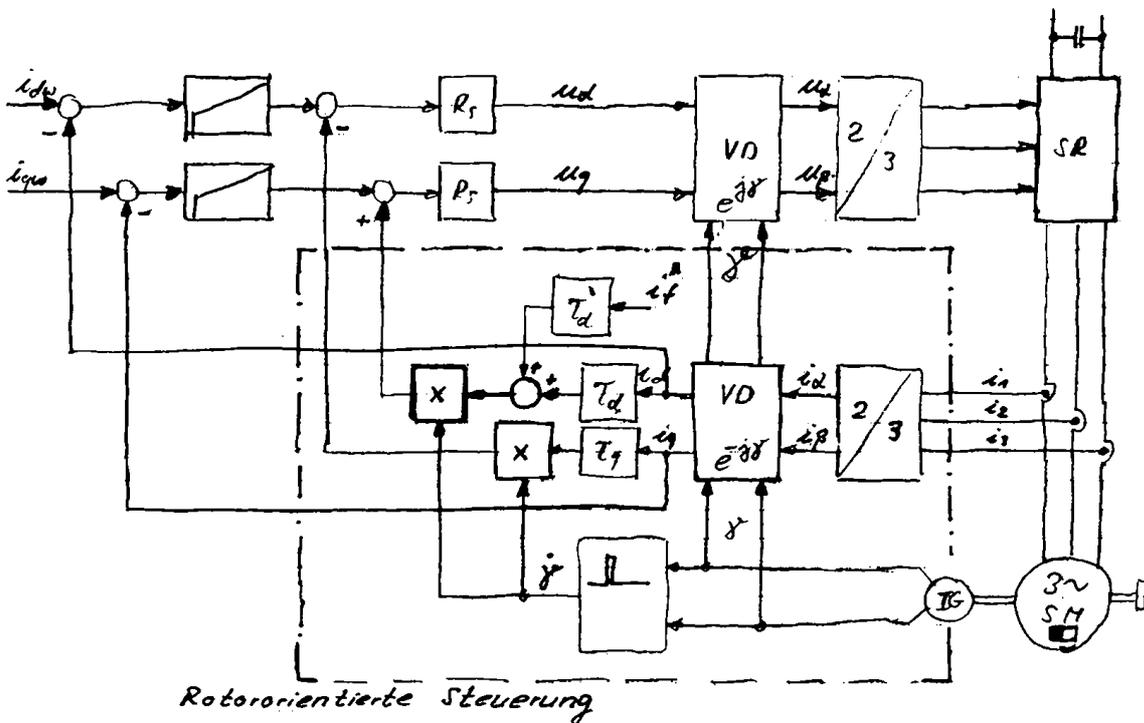


Bild 21.3: Struktur zur Rotorflußorientierten Steuerung

## 21.2 Statorflußorientierte Steuerung

$$\underline{\Psi}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \Psi_S$$

$$\underline{i}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i_S \cdot e^{j(\epsilon_S - \phi_S)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (i_{Sp} + j i_{Sq})$$

$$(u_d + j u_q) = R_S \cdot (i_d + j i_q) + L_d \cdot (\dot{i}_d + j \dot{i}_q) + L_d \cdot \dot{\gamma} \cdot (-i_q + j i_d) + j \cdot L_{hd} \cdot \dot{i}_f \cdot \dot{\gamma}$$

Multiplikation mit  $e^{j(\phi_S - \gamma)}$  und Aufspaltung in die Komponenten ergibt

$$\frac{u_{Sp}}{R_S} = i_{Sp} + \tau_d \cdot \dot{i}_{Sp} - \dot{\gamma} \cdot \tau_d \cdot i_{Sq} - \dot{\gamma} \cdot i_f'' \cdot \frac{L_{hd}}{R_S} \cdot \sin(\phi_S'' - \gamma)$$

$$\frac{u_{Sq}}{R_S} = i_{Sq} + \tau_d \cdot \dot{i}_{Sq} + \dot{\gamma} \cdot \tau_d \cdot i_{Sp} + \dot{\gamma} \cdot i_f'' \cdot \frac{L_{hd}}{R_S} \cdot \cos(\phi_S'' - \gamma)$$

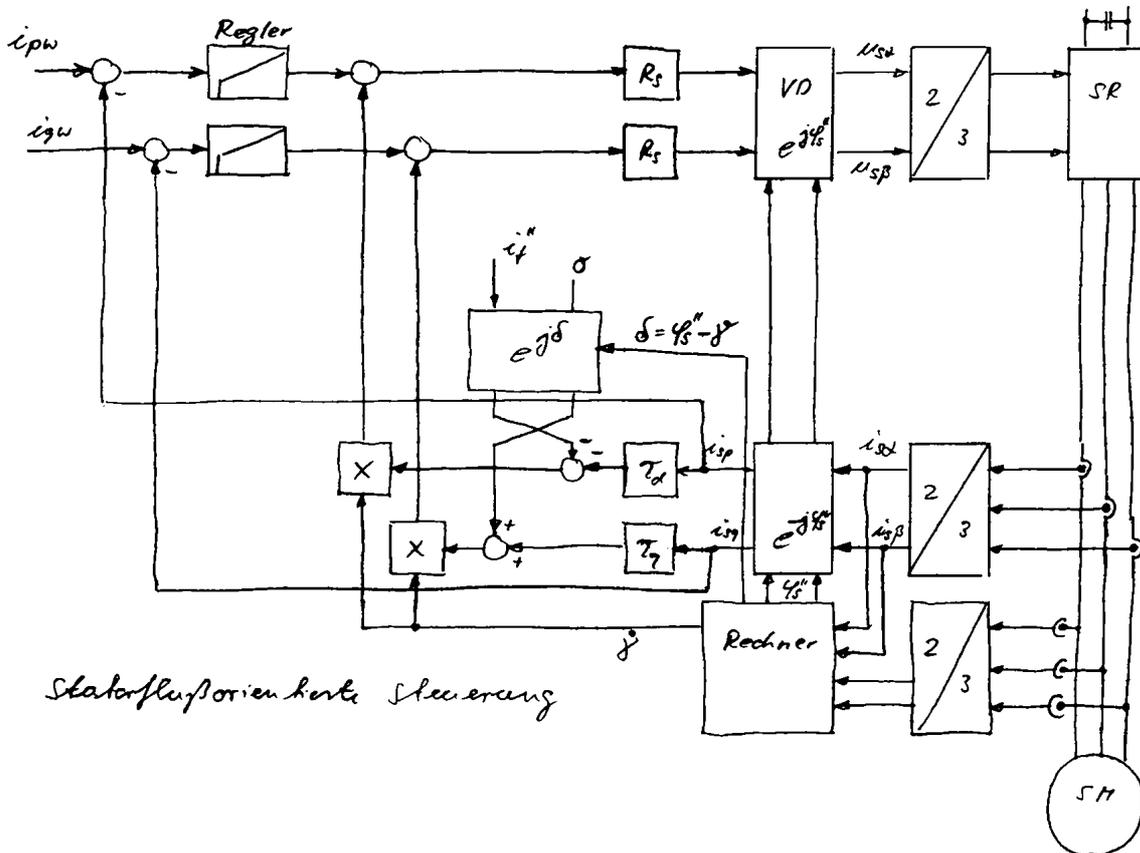


Bild 21.4: Struktur zur Ständerflußorientierten Steuerung



## 17 Synchronmaschine

### 17.1 Permanentterregte Synchronmaschine ohne Dämpferwicklungen

Der Erregerstrom kann als konstant angenommen werden. Meistens sind keine Dämpferwicklungen vorhanden.

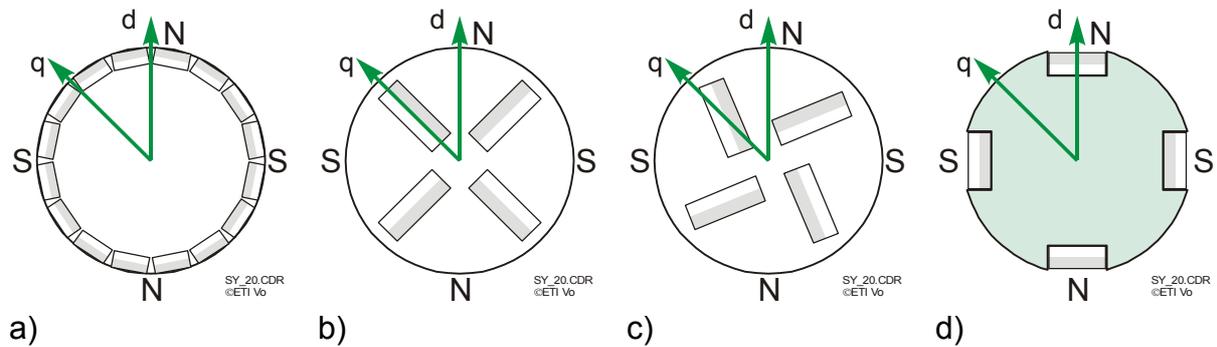


Bild 17.1: Bauarten von permanentterregten Synchronmaschinen

Konstruktionsversionen

- $L_d=L_q$  Vollpolmaschine mit Flachmagnetanordnung. Die Magnete sind meistens aufgeklebt.
- $L_q>L_d$  Teilpolmaschine mit Flachmagnetanordnung.
- $L_q<L_d$  Sammleranordnung.

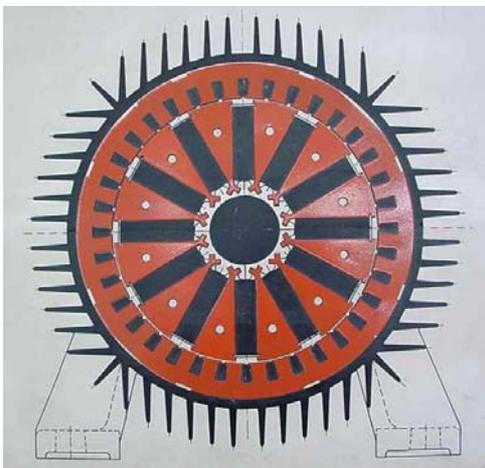


Bild 17.2: Bauarten von permanentterregten Synchronmaschinen

### 17.2 Optimale Steuerung bei vorgegebenem Drehmoment

Hier soll untersucht werden welcher minimale Statorstrom zur Erreichung eines vorgegebenen Drehmoments nach Betrag und Phase eingestellt werden muß.

$$\dot{i}_f = const. > 0$$

$$\begin{aligned}
 u_d &= R_S \cdot \dot{i}_d - \dot{\gamma} \cdot \Psi_q + \dot{\Psi}_d & \text{mit} & \quad \Psi_d = L_d \cdot i_d + L_{hd} \cdot i_f'' \\
 u_q &= R_S \cdot \dot{i}_q + \dot{\gamma} \cdot \Psi_d + \dot{\Psi}_q & & \quad \Psi_q = L_q \cdot i_q
 \end{aligned}$$

Das Drehmoment ist

$$M_{i1} = p \cdot (L_{hd} \cdot i_f'' \cdot i_q + (L_d - L_q) \cdot i_d \cdot i_q)$$

$$i_s = \sqrt{i_d^2 + i_q^2} = \text{Minimum}$$

### 17.2.1 $L_d=L_q$ und vorgegebenem Drehmoment

Wenn die Längs- und Querinduktivität gleich groß ist, fällt das Reluktanzmoment weg, so daß für minimalen Strom die Komponente  $i_d$  null gemacht werden kann.

Steuervorschrift lautet daher  $i_d=0$  und  $i_{s1} = \frac{1}{\sqrt{2}} i_q$

### 17.2.2 $L_d \neq L_q$ und vorgegebenem Drehmoment

Für jedes  $M_i$  ist ein Wertepaar  $i_d, i_q$  einzustellen bei dem der Ständerstrom minimal wird. Wegen der Rückwirkung

### 17.2.3 Statorflußorientierte Steuerung

### 17.2.4 Rotorflußorientierte Steuerung



## 15 Leistungen bei der SM

Die komplexe Scheinleistung ist allgemein.

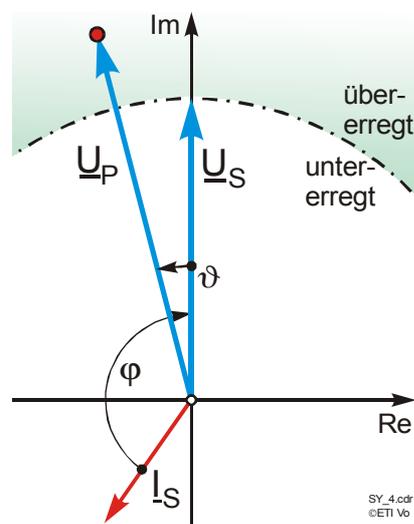
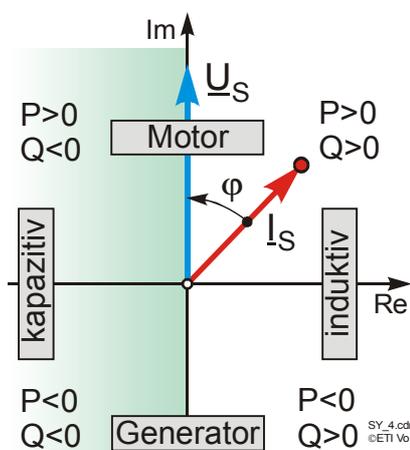
$$\underline{S} = \underline{i}_{S1}^* \cdot \underline{u}_{S1} + \underline{u}_{S1}^* \cdot \underline{i}_{S1} + u_{S0} \cdot i_{S0} \quad (15.1)$$

Die Wirk- und Blindleistung ist dabei:

$$P = 2 \cdot \text{Re}\{\underline{i}_{S1}^* \cdot \underline{u}_{S1}\} \quad \text{und} \quad Q = 2 \cdot \text{Im}\{\underline{i}_{S1}^* \cdot \underline{u}_{S1}\} \quad (15.2)$$

$$P = 3 \cdot U_S \cdot I_S \cdot \cos \varphi \quad \text{und} \quad Q = 3 \cdot U_S \cdot I_S \cdot \sin \varphi \quad (15.3)$$

### 15.1 Motor- und Generatorbetrieb



Aus der Lage der Spitze des Ständerstromes kann der Betriebszustand abgelesen werden.

Ist der Betrag der Polradspannung größer als die Ständerspannung nennt man die Maschine übererregt

Bild 15.1: a) Definition von Motor- und Generatorbetrieb und der Blindleistung; b) Definition von unter- und übererregt.

Bei Leerlauf ( $I_S=0$ ) kann an den Klemmen der Maschine die Polradspannung gemessen werden. Weil dann auch der Polradwinkel  $\vartheta=0$  ist, gilt

$$U_S = U_P = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot X_{hd} \cdot \dot{i}_f$$

Wird zudem noch die Ständernennspannung eingestellt, nennt man den zugehörigen Erregerstrom  $\dot{i}_{f0}$ . Dieser Wert wird später als Bezugswert für den Erregerstrom verwendet.

$$\dot{i}_{f0} = \frac{3 \cdot U_{SN}}{\sqrt{2} \cdot X_{hd}}$$

### 15.2 Betriebskennlinien der Vollpolmaschine

Voraussetzungen:  $R_S=0$ ;  $X_d=X_q$ ;  $U_S=U_{SN}$ ;  $\omega_S=\omega_{SN}$ .



Wegen der bezogenen Darstellung kann an der Zeigerspitze von  $k_C$  auf der reellen Achse ein neues Koordinatensystem für die auf die Nennscheinleistung bezogene Wirk- und Blindleistung  $\tilde{P}$  und  $\tilde{Q}$  eingeführt werden (Bild 15.2).

Es ergeben sich drei Begrenzungen

- Stabilitätsgrenze bei  $\vartheta = \pm 90^\circ$
- Polradspannung ist begrenzt
- Nennstrom kann z.T. wegen der höheren Polradspannung nicht erreicht werden

### 15.2.1 V-Kurven

Welcher bezogene Erregerstrom muß bei Ständerennspannung als Funktion des bezogenen Ständerstromes eingestellt werden, daß der  $\cos\varphi$  konstant wird?

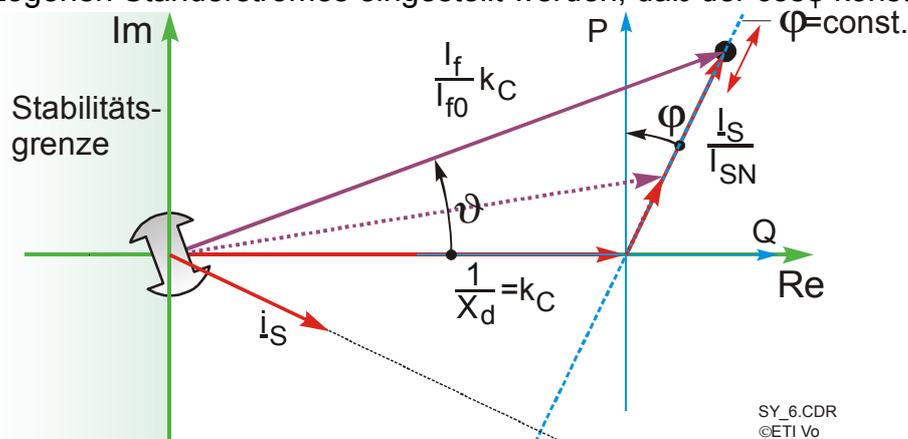


Bild 15.3: Bezogenes Zeigerdiagramm zum Berechnen der V-Kurven ( $\varphi = \text{const.}$ ).

Mit Hilfe des Cosinussatzes wird aus dem bezogenen Zeigerdiagramm (Bild 15.3)

$$\left(\frac{I_f}{I_{f0}}\right)^2 k_C^2 = k_C^2 + \left(\frac{I_S}{I_{SN}}\right)^2 - 2 \cdot k_C \cdot \frac{I_S}{I_{SN}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$$

dividiert durch  $k_C^2$  und  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi$  berücksichtigt

$$\left(\frac{I_f}{I_{f0}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{I_S}{I_{SN}} \cdot \frac{1}{k_C}\right)^2 + 2 \cdot \frac{I_S}{I_{SN}} \cdot \frac{1}{k_C} \cdot \sin\varphi \quad \text{oder}$$

$$\boxed{\frac{I_f}{I_{f0}} = \sqrt{1 + \left(\frac{I_S}{I_{SN}} \cdot \frac{1}{k_C}\right)^2 + 2 \cdot \frac{I_S}{I_{SN}} \cdot \frac{1}{k_C} \cdot \sin\varphi}} \quad (15.8)$$

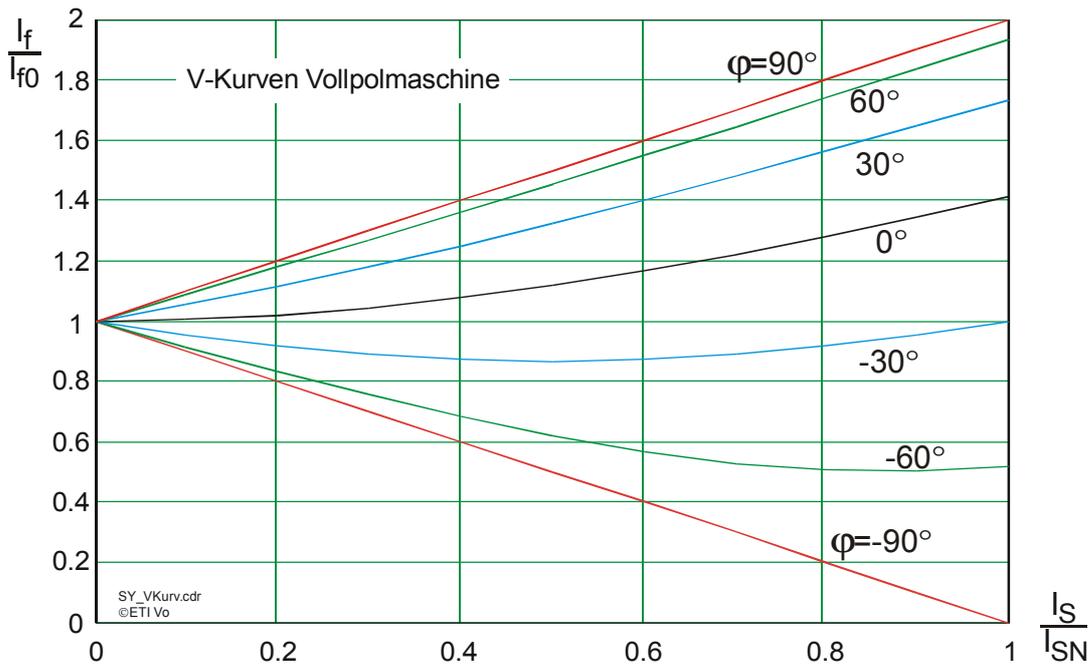
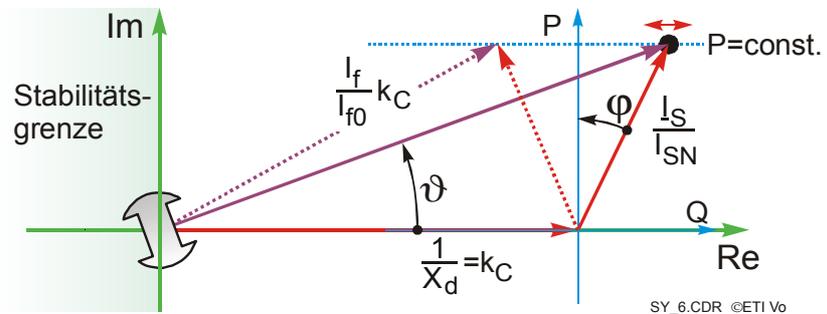


Bild 15.4: V-Kurven ( $\cos\varphi=\text{const}$ ; Erregerstrombedarf= $f(I_s)$ ;  $k_C=1$ )

### 15.2.2 Regulierkurven

Die Regulierkurven stellen den Erregerstrombedarf des Turbogenerators in Abhängigkeit vom Belastungsstrom dar, wenn die Wirk- bzw. die Blindleistung konstant gehalten und die jeweils andere Größe verändert wird.

a)  $P=\text{const.}; Q=\text{var.}$



b)  $P=\text{var.}; Q=\text{const.}$

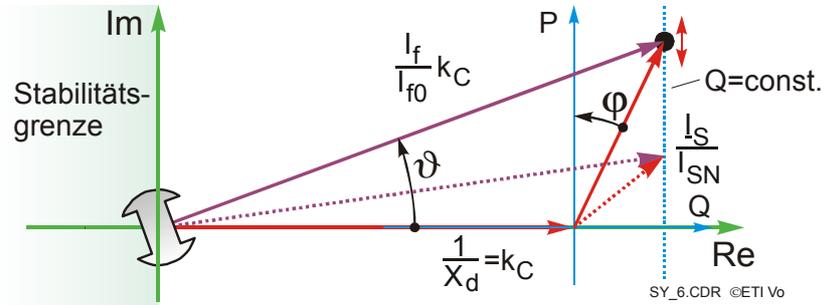


Bild 15.5: Zeigerdiagramme zum Berechnen der Regulier-Kurven.

Zur graphischen Darstellung muß die auf die Nennleistung bezogene Wirk- und Blindleistung eingeführt werden.

$$\tilde{P} = \frac{U_{SN} \cdot I_S}{U_{SN} \cdot I_{SN}} \cdot \cos \varphi = \frac{I_S}{I_{SN}} \cdot \cos \varphi \quad (15.9)$$

$$\tilde{Q} = \frac{U_{SN} \cdot I_S}{U_{SN} \cdot I_{SN}} \cdot \sin \varphi = \frac{I_S}{I_{SN}} \cdot \sin \varphi \quad (15.10)$$

$$\tilde{P}^2 + \tilde{Q}^2 = \left( \frac{I_S}{I_{SN}} \right)^2 \quad \text{oder} \quad \frac{I_S}{I_{SN}} = \sqrt{\tilde{P}^2 + \tilde{Q}^2}$$

Aus Gl.  $\frac{I_f}{I_{f0}} = \sqrt{1 + \left( \frac{I_S}{I_{SN}} \cdot \frac{1}{k_C} \right)^2} + 2 \cdot \frac{I_S}{I_{SN}} \cdot \frac{1}{k_C} \cdot \sin \varphi$  wird durch Einsetzen von  $\tilde{P}$  und  $\tilde{Q}$

$$\boxed{\frac{I_f}{I_{f0}} = \sqrt{1 + \frac{1}{k_C^2} \cdot (\tilde{P}^2 + \tilde{Q}^2)} + 2 \cdot \frac{1}{k_C} \cdot \tilde{Q} \cdot \sin \varphi} \quad (15.11)$$

Bei Phasenschieberbetrieb ist  $P=0$  und es ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen Blindleistung und Erregerstrom.

$$\frac{I_f}{I_{f0}} = 1 + \frac{\tilde{Q}}{k_C} \quad \text{bei Phasenschieberbetrieb } P=0; \varphi=\pm 90^\circ \quad (15.12)$$

Zur Darstellung des bezogenen Erregerstromes als Funktion des Ständerstromes wird noch der Zusammenhang der Wirk- und Blindleistung mit dem Strom benötigt.

Aus diesen beiden Gleichungen kann nun eine Größe vorgegeben und die andere verändert werden.

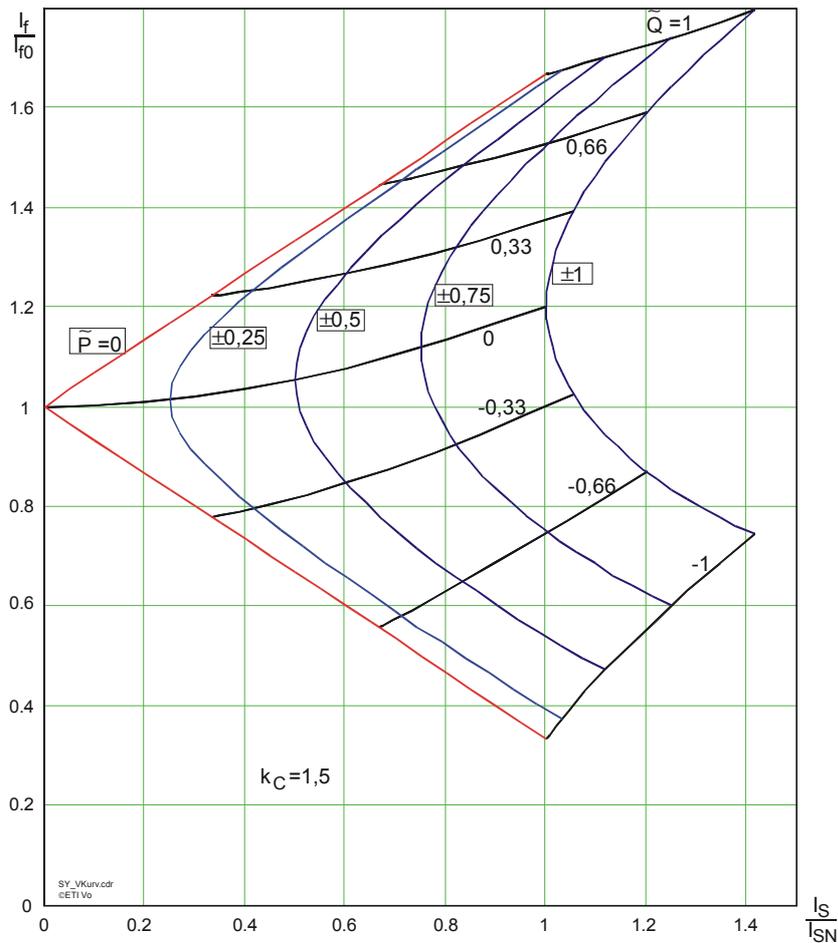


Bild 15.6: Regulierungskurven (Erregerstrom bei {P=const., Q=var}; {P=var., Q=const.};  $-1 \leq \tilde{P} \leq 1$ ;  $-1 \leq \tilde{Q} \leq 1$ ;  $k_C=1,5$ )

Man kann auch den Erregerstrom als zweidimensionale Funktion von Wirk- und Blindleistung auffassen und die Funktion nach gl. dreidimensional darstellen.

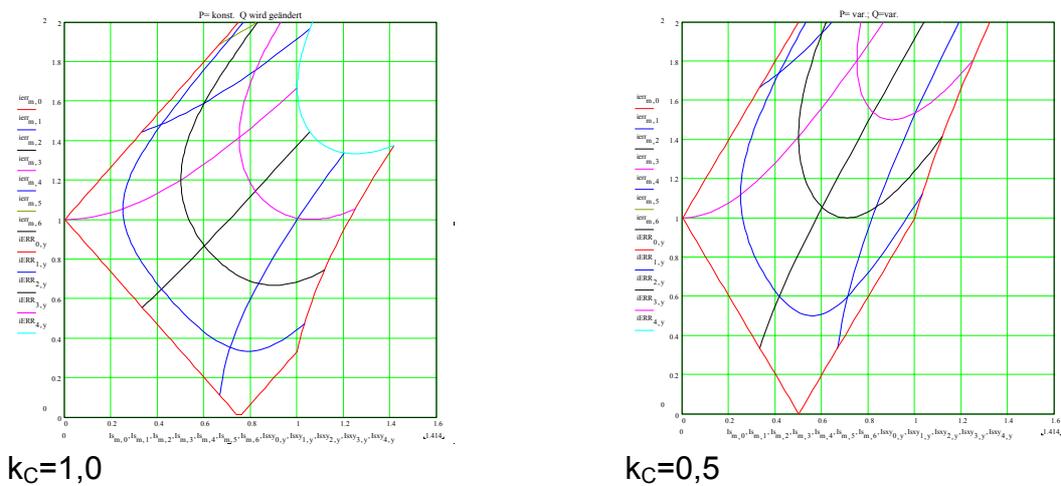
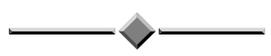


Bild 15.7: Regulierungskurven (Erregerstrom bei {P=const., Q=var}; {P=var., Q=const.};  $-1 \leq \tilde{P} \leq 1$ ;  $-1 \leq \tilde{Q} \leq 1$ ;  $k_C=1,5$ )



### 15.2.3 Grenzkurven von Strom und Leistungen

Polradspannung ist begrenzt

Erwärmung

Stabilitätsgrenze

### 15.2.4 Phasenschieberbetrieb

Wirkleistung ist Null. Der  $\cos\Phi=0$  Es wird nur Blindleistung mit dem Netz ausgetauscht.

### 15.2.5 Konstanter Strom – Phasenwinkel beliebig

Welche Ortskurve beschreiben die Zeiger der Polradspannung; Fluß; Magnetisierungsstrom wenn der Ständerstrom dem Betrage nach konstant gehalten wird und der Phasenwinkel von 0 bis 360° verändert wird?

Welcher Unterschied ergibt sich zwischen Vollpol und Schenkelpolmaschine?

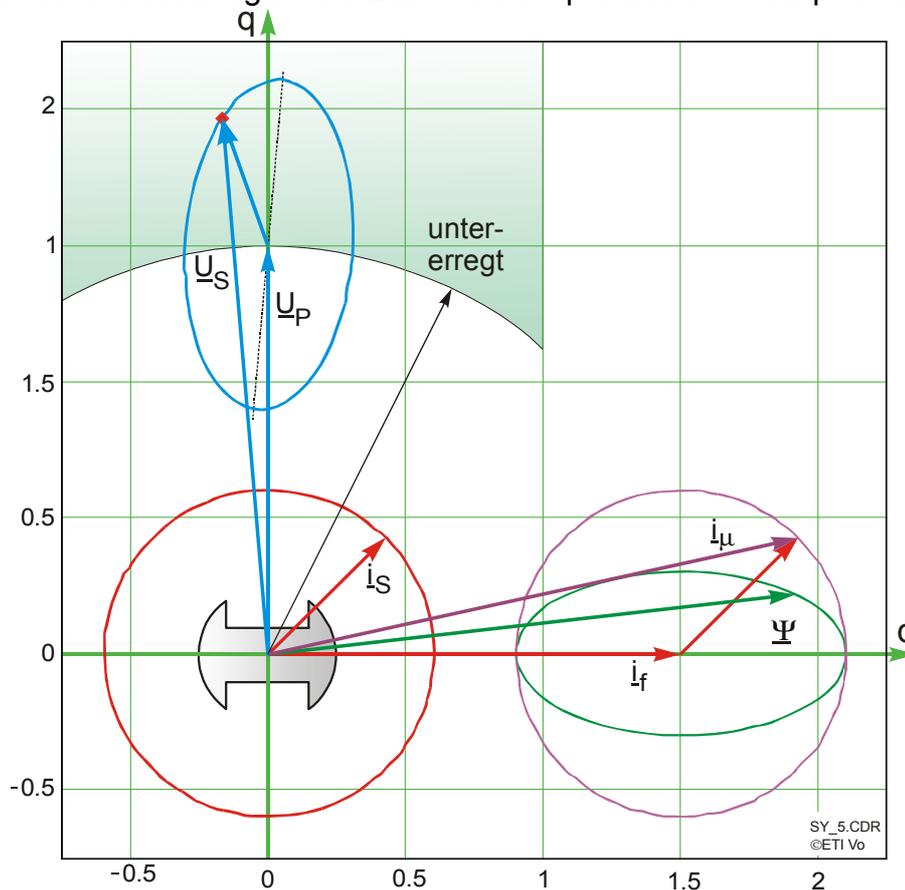


Bild 15.8: Erregerstrom als Funktion von Wirk- und Blindleistung.

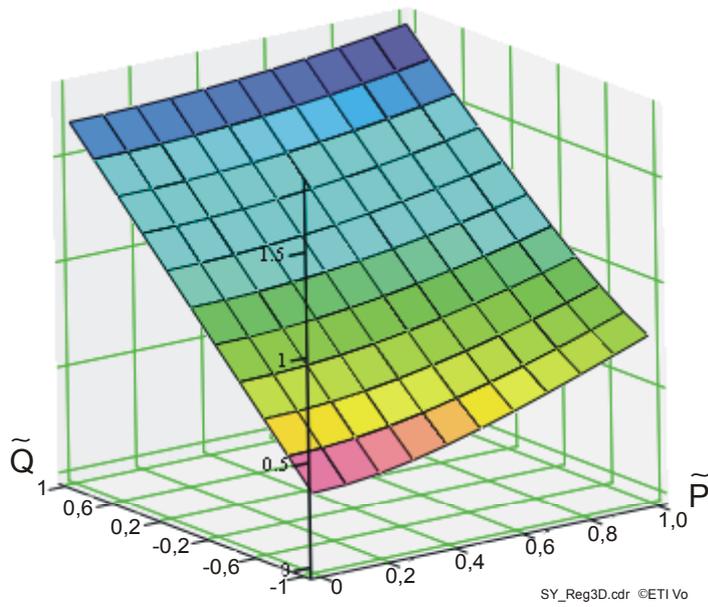


Bild 15.9: Bezogener Erregerstrom als Funktion von bezogener Wirk- und Blindleistung.





## 39 Die Wahl des Vorfaktors bei der Raumzeigerdefinition

Aus der leistungsinvarianten Transformation (Späth, Vogelmann) folgt die Transformationsvorschrift:

Aus der Vorgabe dass die Zahlbereiche oder Aussteuerungsbereiche in der Signalverarbeitung für die dreiphasigen Signale und die Raumzeiger und die Nullkomponente gleich sein sollen, folgt die Transformationsvorschrift.

Da Ströme und Spannungen der jeweils gleichen Transformation unterworfen werden, gelten die in der Vorlesung „Systemanalyse und Betriebsverhalten der Drehstrommaschinen“ abgeleiteten Zusammenhänge von Strömen und Spannungen gleichermaßen für beide Raumzeigerdarstellungen. Unterschiede ergeben sich in folgenden Punkten:

- 2> Achsenbeschriftung bzw. Maßstab bei bildlichen Darstellungen der Raumzeiger (Faktor)
- b) Berechnung des Drehmoments (Faktor
- 0) Berechnung der Leistung (Faktor )
- d) Achsenbeschriftung bzw. Maßstab bei Darstellungen des Zeitverlaufs der Nullkomponente.

Anmerkung: Die Darstellungen können nicht durch Angabe eines einheitlichen Faktors für Raumzeiger und Nullkomponente ineinander überführt werden. Das schadet aber nichts, da die Nullkomponente in den meisten Fällen vor der Betrachtung der dynamischen Zusammenhänge abgetrennt und nicht weiter betrachtet wird.

## 28 Begriffe der Matrizenrechnung

Hier werden ganz kurz die in diesem Skript verwendeten Matrizenbegriffe dargestellt.

### 28.1 Matrizen

$$\text{Zyklische Matrix } \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{bmatrix}$$

$$\text{Symmetrische Matrix } \begin{bmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^T$$

Eine symmetrische Matrix muß quadratisch sein.

(28.1)

**regulär** → Die Umkehrfunktion existiert  $\text{Det}(\underline{x}) \neq 0$

**hermitisch** →  $\underline{x}$  Diagonale einer hermitischen Matrix ist reell und symmetrisch. Die Determinante ist von  $\underline{x}$  ist reell.  $(a) = (a)^{*T}$ . Im reellen fallen die Begriffe symmetrisch und hermitisch zusammen

**Unitär** →  $a_{ik}^* = a_{ik}$  z.B.  $\begin{bmatrix} a & c+jd \\ c-jd & b \end{bmatrix}$  Bei reellen Matrizen: unitär → orthogonal

$$(X) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & j \sin \varphi \\ j \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \rightarrow (X)^{*T} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -j \sin \varphi \\ -j \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Die Inverse kann bei unitären Matrizen besonders einfach gebildet werden.

**Normal** →  $(a)^{-1} = (a)^{*T}$

**Inverse** →  $(x)^{-1}$  Es ist  $(x) \cdot (x)^{-1} = (x)^{-1} \cdot (x) = (E)$

**Transponiert** → Spalten und Zeilen werden vertauscht

**Orthogonal** →  $(a)^T = (a)^{-1}$  oder  $(x) \cdot (x)^T = (E)$  Skalarprodukte je zweier verschiedener Spalten oder zweier verschiedener Zeilen sind gleich Null. Produkte jeder Zeile oder jeder Spalte mit sich selbst ergibt 1.

**Nichtsingulär:** Eine  $n \times n$  Matrix ist nicht singulär, wenn eine Matrix B existiert, so daß gilt  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$

### 28.2 Einige Matrizenoperationen

$$k \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot k = (k \cdot a_{jk})$$

$$k \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot k + \mathbf{B} \cdot k$$

$$(k \cdot \mathbf{A})^T = k \cdot \mathbf{A}^T$$

$$k \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot k) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (k \cdot \mathbf{B})$$

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$$





## 40 Anhang

### 40.1 Literatur

Die im folgenden angegebenen Literaturstellen sind nur eine kleine Auswahl und daher keineswegs vollständig.

#### 40.1.1 Literatur zur Asynchronmaschine

- [1] **Linse, H., Fischer, R.:** Elektrotechnik für Maschinenbauer. B.G. Teubner Verlag Stuttgart, 10. überarb. Auflage 2000, 372 Seiten; ISBN: 3519263254, Preis EUR 34,76

Sehr gut für die Vorlesung geeignet, da alle Kapitel ausführlich genug behandelt werden und die in der Elektrotechnik übliche Zählweise normgerecht berücksichtigt ist.

#### 40.1.2 Literatur zur Elektronik

- [12] **Ulrich Tietze, Christoph Schenk:** Halbleiter-Schaltungstechnik, m. CD-ROM. Neubearb. u. erw. Aufl. 2001, 1421 S. m. 1328 Abb. Kunststoff, Springer Verlag Berlin; ISBN: 3-540-64192-0, Preis: EUR 81,76

Der Tietze-Schenk stellt für den Studierenden, den Lehrenden und den in der Praxis Tätigen gleichermaßen ein sehr praxisbezogenes und dennoch wissenschaftlich fundiertes Lehr- und Nachschlagewerk dar, das zum Fundus eines jeden Elektrotechnikers gehören sollte.

Das Lehrbuch enthält alle wesentlichen Aspekte der Leistungselektronik sowie zahlreiche Übungen und Testaufgaben. Themen: Grundlagen der Leistungselektronik; Leistungshalbleiter; Steuersätze netzgeführter Stromrichter; Fremdgeführte Stromrichter; Selbstgeführte Stromrichter; Umrichterrückwirkungen und Elektromagnetische Verträglichkeit.

#### 40.1.3 Weiterführende Literatur zu Spezialgebieten

- [20] **Erich Rummich:** Elektrische Schrittmotoren und -antriebe. Funktionsprinzip. Betriebseigenschaften. Meßtechnik. Taschenbuch - 292 Seiten - Expert Verlag Renningen (1992); ISBN: 3816906788; Preis: EUR 45,51

Aufbau, wirkungsweise und Betriebsverhalten sämtlicher gängiger Schrittmotoren werden beschrieben. Ein Buch für Entwickler, Konstrukteure und Anwender von Positionierantrieben.

- [21] **W. Hirschmann, A. Hauenstein:** Schaltnetzteile. Konzepte, Bauelemente, Anwendungen. Siemens Fachbuch, ISBN 3-8009-1550-2.

In diesem Buch werden alle Arten klassischen Arten der Schaltnetzteile und den dazugehörigen Komponenten beschrieben. Nicht -bzw. nur sehr kurz- behandelt werden die in jüngerer Zeit angewendeten resonanten Prinzipien. Gut verständlich.

- [22] **Möller, F., Fricke, H.:** Grundlagen der Elektrotechnik. Teubner Verlag Stuttgart. ca. 56.- DM.

Es werden keine elektrische Maschinen und Stromrichter sondern wie der Titel aussagt nur Grundlagen behandelt.

- [23] **Ebinger, A.:** Komplexe Rechnung. Hüthig-Verlag Heidelberg. Auflage 1986.

Kurzer Überblick über die komplexe Rechnung mit einigen Anwendungsbeispielen aus der Elektrotechnik.

- [24] **Weyh, U.:** Zählpeile in der Elektrotechnik. Oldenburg Verlag München

Ausführliche Darstellung der Anwendung von Zählpeilen in der Elektrotechnik.

- [25] **Heumann, K.:** Grundlagen der Leistungselektronik. B.G. Teubner Stuttgart, 3.

Auflage , 1985.

Theorie und Anwendung von leistungselektronischen Schaltungen werden aufgezeigt.

- [26] **Möller, F., Vaske, P.:** Elektrische Maschinen und Umformer. Teil 1: Aufbau, Wirkungsweise, Betriebsverhalten B.G Teubner Stuttgart, 12. Auflage 1976.

Elektrische Maschinen werden ausführlich behandelt.

- [27] **Fischer, Rolf:** Elektrische Maschinen. Hanser Verlag, 409 Seiten, 10. überarb. Aufl. 1999; ISBN: 3446212620; Preis: EUR 25,46.

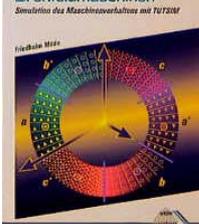
Neben der Theorie der elektrischen Maschinen werden auch Verfahren und Probleme bei Stromrichterbetrieb von elektrischen Maschinen (Servoantriebe) dargestellt.

- [28] **Schrüfer, E.:** Elektrische Meßtechnik. Hanser Verlag München, 3. Auflage 1988.

Meßtechnische Verfahren zum Messen von elektrischen und vor allem nichtelektrischer Größen werden ausführlich beschrieben.

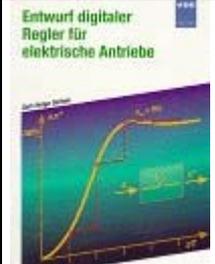
- [29] **Vogel, J.:** Grundlagen der Elektrischen Antriebstechnik mit Berechnungsbeispielen. Hüthig Verlag Heidelberg. 3. Auflage 1985.

## 40.2 Auslegung el. Maschinen

	<p>Vogt, Karl, Berechnung elektrischer Maschinen; Erschienen: 21.10.1995 ; Einband: kartoniert, Paperb.; 108,00 DM; ISBN: 3-527-28391-9</p>
	<p>Milde, Friedhelm: Dynamisches Verhalten von Drehfeldmaschinen Einband : kartoniert, Paperb; 35,00 DM; ISBN: 3-8007-1937-1</p>
	<p>Ulrich Riefenstahl; Elektrische Antriebstechnik.; DM 88,00; Gebundene Ausgabe – Teubner, Stgt. ; Erscheinungsdatum: 2000; ISBN: 3519064294</p>

	<p>Hans-Dieter Stölting, Eberhard Kallenbach: Handbuch Elektrische Kleinantriebe.; DM 99,80; Gebundene Ausgabe – 400 Seiten – Hanser Elektronik / Fachbuch; Erscheinungsdatum: 2001; ISBN: 3446210075</p>
	
	
	<p>Grundlagen elektrischer Maschinen und Antriebe. Von Hans Otto Seinsch ; DM 34,00; Taschenbuch – 234 Seiten – Teubner, Stgt. ; Erscheinungsdatum: 1993; ISBN: 3519061643</p>

### 40.3 Betriebsverhalten

### 40.4 Dynamik

	<p>Milde, Friedhelm: Dynamisches Verhalten von Drehfeldmaschinen Einband : kartoniert, Paperb; 35,00 DM; ISBN: 3-8007-1937-1</p>
	<p>Friedhelm Milde: Dynamisches Verhalten von Drehstrommaschinen; VDE-Verlag; nicht mehr verfügbar</p>
	<p>Werner Leonhard: Regelung Elektrischer Antriebe.; DM 99,90; Gebundene Ausgabe - Springer Verlag; Erscheinungsdatum: 2000 ISBN: 354067179X</p>
	<p>Praxis der Drehstromantriebe Brosch, Peter: Praxis der Drehstromantriebe mit fester und variabler Drehzahl; Vogel Verlag Würzburg; Erschienen : 05/2001; 78,00 DM; ISBN : 3-8023-1748-3</p>

## 40.5 Regelung el. Antriebe

	<p>Gerhard Pfaff: Regelung elektrischer Antriebe, Bd.1, Eigenschaften, Gleichungen und Strukturbilder der Motoren; DM 39,80 Sondereinband - Oldenbourg, Mchn. Erscheinungsdatum: 1994 ISBN: 3486230948</p>
	<p>Kümmel, Fritz: Elektrische Antriebstechnik Teil 3; Antriebsregelung – Feldorientiert geregelte Drehstromantriebe – Busvernetzungen; Verlag : VDE; 498 Seiten; Erschienen: 1998; Einband: Kartoniert; 88,00 DM; ISBN : 3-8007-2240-2</p>

### Praxis der Drehstromantriebe

Mit fester und variabler Drehzahl

Brosch, Peter F

Verlag : Vogel Würzburg /VM; Erschienen : 05/2001; 78,00 DM; ISBN : 3-8023-1748-3

### Stromrichtergespeiste Drehstromantriebe

Theorie und Betriebsverhalten von Asynchronantrieben

Budig, Peter K; VDE Verlag; 272 Seiten; Erschienen: 02/2001; Einband: Kartoniert;  
98,00 DM; ISBN : 3-8007-2371-9

-----

### Kurzbeschreibung

Dieser Band stellt die wesentlichen Eigenschaften von Gleichstrom- Asynchron- und Synchronmotoren im Hinblick auf die Streckenanalyse dar und beschreibt ihre dynamische Struktur.

---

Entwurf digitaler Regler für elektrische Antriebe.

von Gert-Helge Geitner

DM 58,00

Taschenbuch - 191 Seiten - VDE, Bln.

Erscheinungsdatum: 1996

ISBN: 3800718472

Amazon.de Verkaufsrang 123.078

### Kurzbeschreibung

Das Buch bietet eine wichtige Einstiegshilfe zum Entwurf digitaler Antriebsregler für die Praxis. Aufbauend auf den Grundlagen werden Struktur, Optimierung sowie realisierungsbedingte Besonderheiten digitaler Antriebsregelung untersucht.

Durch eine kurze Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen, der Ergebnisse in Form von Tabellen, zusammengefaßten Gleichungen und Nomogrammen sowie Unterscheidung von hand- und maschinellen Berechnungen ist die Anwendung der Ergebnisse ohne großen Aufwand möglich.

---

Control of Electrical Drives

von Werner Leonhard

Preis: DM 98,33

EUR 50,28

Versandfertig in 2 bis 3 Werktagen.

Kategorie(n): Fachbücher, Naturwissenschaften & Technik, Engineering

Größeres Bild

Gebundene Ausgabe - 420 Seiten - Springer Verlag

Erscheinungsdatum: 11. Dezember 1997

ISBN: 3540593802

---

Elektrische Maschinen und Antriebe. Lehr- und Arbeitsbuch. (Lernmaterialien)

von Klaus Fuest, Peter Döring

Preis: DM 44,00

EUR 22,50

Versandfertig in 2 bis 6 Wochen. Bitte beachten Sie, dass Titel gelegentlich vergriffen oder beim Verlag nicht erhältlich sein können. Falls bei diesem Titel Lieferschwierigkeiten auftreten sollten, werden wir Sie benachrichtigen.

Kategorie(n): Naturwissenschaften & Technik, Fachbücher

Größeres Bild

Taschenbuch - Vieweg, Wiesbaden

Erscheinungsdatum: 1999

Auflage: 4., überarb. u. erw. Aufl.

ISBN: 3528340762

Andere Ausgaben: Taschenbuch

---

Elektrische Antriebe - Regelung von Antrieben  
von Dierk Schröder

Preis: DM 149,90

EUR 76,64

Versandfertig in 2 bis 6 Wochen. Bitte beachten Sie, dass Titel gelegentlich vergriffen oder beim Verlag nicht erhältlich sein können. Falls bei diesem Titel Lieferschwierigkeiten auftreten sollten, werden wir Sie benachrichtigen.

Kategorie(n): Fachbücher

Größeres Bild

Gebundene Ausgabe - 650 Seiten - Springer Verlag

Erscheinungsdatum: Juli 2001

Auflage: 2. Aufl. 2001

ISBN: 3540419942



---

## 40.6 Bedeutung der Formelzeichen, Indizes und Symbole

**40.6.1 Formelzeichen**

$\underline{a}$	komplexer Faktor $\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
a	Aussteuergrad
a,b,k	allgemeine Zahlen
A	Fläche (m <sup>2</sup> )
A <sub>L</sub>	A <sub>L</sub> -Wert (in nH)
b	Beweglichkeit (cm <sup>2</sup> /Vs)
B	magnetische Induktion (T=Tesla=Wb/m <sup>2</sup> =Vs/m <sup>2</sup> )
B	Blindleitwert (1/Ω), Stromverstärkung
C	Kapazität (F=Farad=C/V=As/V)
cosφ	Leistungsfaktor der Grundschwingung
d	Dämpfungskonstante, Dämpfung
D	elektrische Flußdichte (C/m <sup>2</sup> =As/m <sup>2</sup> )
e	Elementarladung (1,6·10 <sup>-19</sup> As)
E	elektrisch gespeicherte Energie (J)
E	elektrische Feldstärke (V/m)
f	Frequenz (Hz=Hertz=1/s)
F	Kraft (N)
G	elektrischer Leitwert (Konduktanz) (S=Siemens=1/Ω)
G	Übertragungsfunktion
H	magnetische Feldstärke (A/m)
i, i(t)	Zeitwert des Stromes (A=Ampere)
$\hat{i}$	Amplitude des Stromes (A)
I	Effektivwert des Stromes (A)
$\underline{I}$	komplexer Effektivwert des Stromes (A)
i <sub>r</sub>	Erregerstrom (A)
i <sub>s1,2,3</sub>	Strangströme (A)
i, j	ganze Zahlen
$\underline{E}$	Einheitsmatrix (Vektor)
j	imaginäre Zahl
J	axiales Trägheitsmoment (kg·m <sup>2</sup> =W·s <sup>3</sup> =Nm·s <sup>3</sup> )
R	mechanische Reibkonstante L Induktivität (H=Henry=Vs/A)
L <sub>k</sub>	Kommutierungsinduktivität (Vs/A)
m	Masse (kg=Ns <sup>2</sup> /m)
m	Drehmoment (Zeitwert) (Nm)
m <sub>i</sub>	inneres Drehmoment (Zeitwert) (Nm)
M	mittleres Drehmoment (Nm)
M <sub>L</sub>	Lastmoment (Nm)
n	Drehzahl (1/s=60·1/min)
n	Elektronenkonzentration (1/cm <sup>3</sup> )
p	Löcherkonzentration (1/cm <sup>3</sup> )
P	Wirkleistung (W=Watt=VA=Nm/s)
p	Pulszahl, Polpaarzahl
Q	Blindleistung (VAr), el. Ladung (As)

B	Bremswiderstand
$r_D$	differentieller Widerstand ( $\Omega$ )
R	Wirkwiderstand (Resistanz) ( $\Omega$ )
S	Scheinleistung (VA), Stromdichte ( $A/mm^2$ )
s	Schlupf
$s_k$	Kippschlupf
$s_N$	Nennschlupf
t	Zeit (s)
T	Zeitkonstante, Periodendauer (s)
u, u(t)	Zeitwert der Spannung (V)
u	Spannung (V)
$u_{S1,2,3}$	Statorspannungen (V)
$U_q$	Quellenspannung (V)
$U_Z$	Zwischenkreisspannung
$\ddot{u}$	Übersetzungsverhältnis
V	Verstärkung, Übertragungsfunktion, Volumen ( $m^3$ )
w	Windungszahl
W	Energie (Ws)
X	Blindwiderstand (Reaktanz) ( $\Omega$ )
x	Variable
$X_C$	kapazitiver Blindwiderstand (Kondensanz) ( $\Omega$ )
$X_L$	induktiver Blindwiderstand (Suszeptanz) ( $\Omega$ )
Y	Scheinleitwert (Admitanz) ( $1/\Omega$ )
Z	Scheinwiderstand (Impedanz) ( $\Omega$ )
$\alpha$	Steuerwinkel (alpha, rad oder $^\circ$ )
$\alpha$	Temperaturkoeffizient ( $1/^\circ C$ )
$\alpha$	Nullphasenwinkel der Spannung (rad, $^\circ$ )
$\beta$	Nullphasenwinkel des Stromes (beta, rad, $^\circ$ )
$\chi$	mechanischer Positionswinkel (gamma, rad, $^\circ$ )
$\delta$	Dämpfungskonstante (delta, $1/s$ )
$\delta$	Schrittwinkel (rad, $^\circ$ )
$\varepsilon(t)$	Zeitwert des Winkels e (epsilon, rad, $^\circ$ )
$\varepsilon$	Dielektrizitätskonstante (As/Vm)
$\varepsilon_r$	relative Dielektrizitätskonstante
$\varepsilon_0$	Influenzkonstante ( $8,8542 \cdot 10^{-12}$ As/Vm)
$\eta$	Wirkungsgrad (eta)
$\vartheta$	Temperatur (theta, $^\circ K$ )
$\vartheta$	Polradwinkel zwischen Ständer- und Polradspannung Synchronmaschine
$\kappa, \sigma$	spezifischer el. Leitwert (kappa, sigma, $1/\Omega$ )
$\lambda$	Leistungsfaktor aller Harmonischen (lambda)
$\mu$	Permeabilität (mü, As/V)
$\mu_r$	relative Permeabilität
$\mu_0$	absolute Permeabilität ( $4\pi \cdot 10^{-7}$ As/V)
$\pi$	Zahl 3,141592654 (pi)

$\rho$	spezifischer el. Widerstand (rho, $\Omega\text{m}$ )
$\tau$	Zeitkonstante (tau, s)
$\tau_p$	Polteilung
$\varphi$	Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung (phi, rad, $^\circ$ )
$\cos\varphi$	Leistungsfaktor der Grundschiwingung
$\varphi$	Phasenverschiebung
$\omega$	Kreisfrequenz (omega, 1/s)
$\Delta\vartheta$	Temperaturdifferenz (Delta theta, $^\circ$ )
$\Theta$	Durchflutung (Theta, A)
$\Omega$	mechanische Winkelgeschwindigkeit (1/s)
$\Omega_s$	mechanische synchrone Winkelgeschwindigkeit (Omega, 1/s)
$\Phi$	magnetischer Fluß (Phi, VA/s)
$\tau_s$	Ständerzeitkonstanten Winkel zwischen Strom- und Spannungsraumzeiger
$\varphi_s$	Winkel zwischen dem ersten Statorstrang und dem Fluß

#### 40.6.2 Indizes

a	Ausgang
A	Anker, Anlauf, Anode
$\alpha$	vom Winkel $\alpha$ abhängig
B, BE	Basis, Bezug, Basis-Emitter
C	Collektor, Kapazität
CE	Kollektor-Emitter
d	<b>D</b> irect <b>C</b> urrent (Gleichstrom)
i	ideell (ohne Verluste, theoretisch)
f, ff	Erreger..
f	Freilauf-, Rückarbeits-(diode)
E	Emitter
e	Eingang
eff	Effektivwert
i	Innen (-widerstand)
ist	Istwert
h	Haupt-(fluß)
k	Kurzschluß, Kipp..., kalt
K	Kathode
l	links
L	Induktivität
min	Minimalwert
max	Maximalwert
N	Nennwert, Nennpunkt, Normal
P	Parallel (-schaltung )
q	Quelle
r	rechts, relativ
R	Rotor, Widerstand
s	synchron

S	Serien (-schaltung)
R, S, T;	
1, 2, 3;	
u, v, w;	
$L_1, L_2, L_3$	Phasen des Drehspannungssystems
S	Ständer-
T	tangential
U	die Spannung betreffend
V	Vorwiderstand
w	Wirk (strom), warm
w	Sollwert
X	Blind (-widerstand)
$\sigma$	Streu-(fluß), Streuung
0	Leerlauf, ohne Dämpfung
1,2	positiver, negativer Schalter
1	Grundschiwingung (1. Harmonische)
$\mu$	magnetisierung...
$\infty$	Unendlich

### 40.6.3 Symbole

dt	zeitliche Ableitung
D	Differenz
$\nabla$	Nabla-Operator partielle Ableitung
$\underline{U}$	komplexe Größe
$ \underline{U} $	Betrag der Größe U.
$\bar{u}$	zeitlicher Mittelwert der Größe u
$\underline{U}$	komplexer Effektivwert der Größe u
j	komplexe Einheit $\sqrt{-1}$
$\tilde{u}$	Normierte Größe
~	proportional
$\approx$	ungefähr gleich
*	konjugiert komplex
grad(u)	Gradient von u
$X^T$	Transponierte einer Matrix
---o	Übergang vom Zeitbereich in den s-Bildbereich
→	daraus folgt
$\dot{x}$	Zeitliche Ableitung der Größe x
$\nabla$	Nabla-Operator
Re(x)	Realteil der Größe x
Im(x)	Imaginärteil der Größe x
sign	Vorzeichen einer Größe

ASM **A**synchronmaschine

D	<b>D</b> iode
FG	<u>F</u> unktionsgeber
GM	<b>G</b> leichstrommaschine
GS	<u>G</u> leich <u>s</u> tromsteller
HP	<u>H</u> ochpaß
IG	<u>I</u> mpulsgeber
PI	<u>P</u> roportional- <u>I</u> ntegral - (Regler)
SR	<u>S</u> trom <u>r</u> ichter
SM	<u>S</u> ynchron <u>m</u> aschine
T	<u>T</u> ransistor
Th	<b>T</b> h Thyristor
TP	<u>T</u> iefpaß
Th	<u>T</u> h Thyristor
VCO	<u>V</u> oltage- <u>C</u> ontrolled- <u>O</u> szillator
WR	<u>W</u> echsel <u>r</u> ichter

## 40.7 Tabellen

### 40.7.1 Zehnerpotenzen

	d	deci-	$10^{-1}$		da	deka-	$10^1$
	c	centi-	$10^{-2}$		h	hekto-	$10^2$
*	m	milli-	$10^{-3}$	*	k	kilo-	$10^3$
*	$\mu$	mikro-	$10^{-6}$	*	M	Mega-	$10^6$
*	n	nano-	$10^{-9}$	*	G	Giga	$10^9$
*	p	pico-	$10^{-12}$	*	T	Tera-	$10^{12}$

Tabelle 1: Bezeichnungen der Zehnerpotenzen von Einheiten. Die mit \* gekennzeichneten Potenzen sind in der Elektrotechnik gebräuchlich.

### 40.7.2 Umrechnung Energie

	J (Ws,Nm)	mkp	kcal	kWh
1 J	1	0,1019	$2,39 \cdot 10^{-4}$	$2,78 \cdot 10^{-7}$
1 mkp	9,81	1	$2,34 \cdot 10^{-3}$	$2,75 \cdot 10^{-6}$
1 kcal	$4,19 \cdot 10^3$	$4,27 \cdot 10^2$	1	$1,165 \cdot 10^{-3}$
1 kWh	$3,6 \cdot 10^6$	$3,67 \cdot 10^5$	$8,6 \cdot 10^2$	1

Tabelle 2: Umrechnungstabelle für die Einheiten der Energie.

### 40.7.3 Leistungseinheiten

	W	mkp/s	PS	kcal/s
1 W	1	0,1019	$1,36 \cdot 10^{-3}$	$2,39 \cdot 10^{-4}$
1 mkp/s	9,81	1	$1,33 \cdot 10^{-2}$	$2,34 \cdot 10^{-3}$
1 PS	735,5	75		0,176
1 kcal/s	$4,19 \cdot 10^3$	427	5,68	

Umrechnungstabelle für Leistungseinheiten.

### 40.7.4 Konstanten

Boltzmannkonstante	$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Ws/}^\circ\text{K}$
Elementarladung	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$
Fallbeschleunigung	$g = 9,81 \text{ m/s}^2$
Influenzkonstante	$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$
absolute Permeabilität	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$
Zahl Pi	$\pi = 3,141592$

## 40.8 Wichtige Winkelbeziehungen

Winkelsumme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Doppelte und halbe Winkel

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)}$$

Produkte von sin- und cos-Funktionen

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \quad , \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

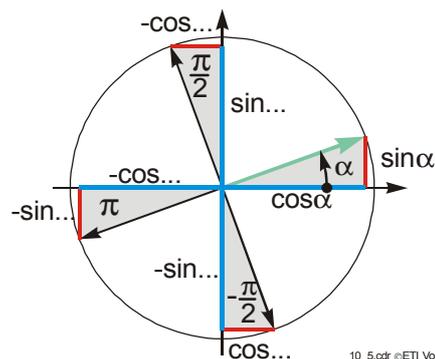
$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot \{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\}$$

	$\beta = 90^\circ \pm \alpha$	$\beta = 180^\circ \pm \alpha$	$\beta = 270^\circ \pm \alpha$	$\beta = -\alpha$
$\sin \beta$	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos \beta$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\tan \beta$	$\mp \cot \alpha$	$\pm \tan \alpha$	$\mp \cot \alpha$	$-\tan \alpha$
$\cot \beta$	$\mp \tan \alpha$	$\pm \cot \alpha$	$\mp \tan \alpha$	$-\cot \alpha$

Reduktionsformeln

Die Reduktionsformeln kann man auch leicht aus den Strecken mit der rechts abgebildeten Skizze ermitteln:

Man zeichnet z.B. im 1. Quadrant den abgebildeten Zeiger mit dem Winkel  $\alpha$  ein und erhält die Strecken  $\sin\alpha$  in Richtung der y-Achse und  $\cos\alpha$  in Richtung der x-Achse. Durch Addition von z.B.  $90^\circ$  wird der in Richtung der x-Achse liegende Abschnitt  $\cos(90^\circ + \alpha)$  genau so groß wie die ne-



gative Strecke der ursprünglichen Sinusfunktion.

$$\text{Also } \cos(\alpha + 90^\circ) = -\sin \alpha$$

$$\text{Cosinussatz: } \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha}$$

$$\text{Sinussatz: } \boxed{\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}}$$

$\alpha$	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
cos $\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{6} = 0,866$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$	$\frac{1}{2} = 0,5$	0
sin $\alpha$	0	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$	$\frac{\sqrt{3}}{6} = 0,866$	1

Einige ausgezeichnete Funktionswerte der Winkelfunktionen

Hyperbelfunktionen (  $x$  kann auch komplex sein):

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

## 40.9 Komplexe Rechnung

Mit komplexen Zahlen lassen sich dieselben Rechenoperationen durchführen wie mit reellen Zahlen. Beim Rechnen mit Winkelfunktionen ergeben sich durch die komplexe Rechnung erhebliche Vereinfachungen.

### 40.9.1 Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl ist die Summe aus einer reellen und einer imaginären Zahl. So ist z.B.:

$$\boxed{\underline{r} = a + j \cdot b} \quad (40.1)$$

Eine komplexe Zahl wird durch Unterstreichen gekennzeichnet. Die imaginäre Zahl  $jb$  entsteht durch Multiplikation der reellen Zahl  $b$  mit dem Faktor  $j = \sqrt{-1}$ . Anders als in der Mathematik, wo  $\sqrt{-1}$  mit  $i$  bezeichnet wird, verwendet man in der Elektrotechnik wegen der Verwechslungsgefahr mit einem zeitabhängigen Strom  $i$  für  $\sqrt{-1}$  den Buchstaben  $j$ . Man bezeichnet  $a$  als den Realteil und  $b$  als den Imaginärteil der komplexen Zahl  $r$ . Die Darstellung einer komplexen Zahl nach Gl.(40.2) bezeichnen wir als R-Form oder Polarkoordinaten. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem wird  $a$  auf der reellen Achse (Abszisse) und  $b$  auf der imaginären Achse (Ordinate) aufgetragen.

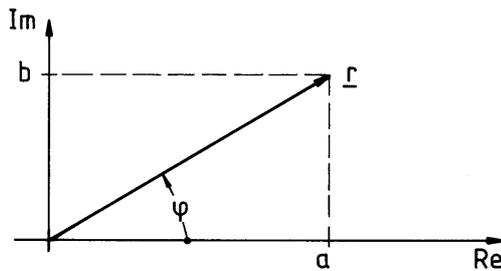


Bild 40.1: Darstellung eines Zeigers in der komplexen Ebene.

Die komplexe Zahl  $\underline{r}$  kann auch durch ihren Betrag  $r$  und ihren Winkel  $\varphi$  mit Hilfe von

$$\underline{r} = r \cdot e^{j\varphi} \quad \text{beschrieben werden.} \quad (40.2)$$

Die Darstellung einer komplexen Zahl nach Gl.(40.2) nennen wir Polarform. Bild 40.1 entnehmen wir:

$$a = r \cdot \cos \varphi \quad (40.3)$$

$$b = r \cdot \sin \varphi \quad (40.4)$$

Wir setzen dies in Gl.(40.1) ein:

$$\underline{r} = r \cdot e^{j\varphi} = r \cdot \cos \varphi + j \cdot r \cdot \sin \varphi \quad (40.5)$$

Daraus erhalten wir die EULERSche Gleichung:

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi \quad (40.6)$$

Der Realteil  $a$ , der Imaginärteil  $b$  und der Betrag  $r$  bilden stets ein rechtwinkliges Dreieck. Mit dem Satz des PYTHAGORAS erhalten wir eine Gleichung um den Betrag zu berechnen:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (40.7)$$

Der Betrag  $r = |\underline{r}|$  ist stets positiv. Aus  $\tan \varphi = b/a$  berechnen wir den Winkel:

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a} \quad (40.8)$$

Der Winkel  $\varphi$  kann positiv oder negativ sein. Bei einem positiven Winkel stimmt der Zählpfeil des Winkels mit dem mathematisch positiven Drehsinn überein (Bild 40.1). Der Winkel wird im Bereich  $-180^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$  angegeben. Dies ist z.B. bei der Negation einer komplexen Zahl von Bedeutung.

$$-\underline{r} = -a - j \cdot b = r \cdot e^{j(\varphi \pm 180^\circ)}$$

Zur Koordinatenumwandlung müssen oft die oben angegebenen Gleichungen benutzt werden.

Die zu  $\underline{r}$  konjugiert komplexe Zahl  $\underline{r}^*$  hat bei der Polarform beim Winkel - und bei der R-Form beim Imaginärteil entgegengesetztes Vorzeichen:

$$\underline{r}^* = a - j \cdot b = r \cdot e^{-j\varphi} \quad (40.9)$$

Wenn die komplexe Zahl als Quotient zweier komplexer Zahlen gegeben ist, gilt:

$$\boxed{x = \frac{a + jb}{c + jd}} \quad ; \quad \text{Betrag} \quad \boxed{|x| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}}} \quad \text{und Winkel} \quad \boxed{\varphi = \arctan \left\{ \frac{b}{a} \right\} - \arctan \left\{ \frac{d}{c} \right\}}$$

### 40.9.2 Addition und Subtraktion

Die Addition und die Subtraktion von zwei Zahlen  $\underline{r}_1 = a_1 + j \cdot b_1$  und  $\underline{r}_2 = a_2 - j \cdot b_2$  führt man zweckmäßig in der R-Form durch. Dabei werden die Realteile und die Imaginärteile getrennt addiert bzw. subtrahiert:

$$\underline{r}_1 + \underline{r}_2 = a_1 + a_2 + j(b_1 + b_2) \quad (40.10)$$

$$\underline{r}_1 - \underline{r}_2 = a_1 - a_2 + j(b_1 - b_2) \quad (40.11)$$

Entsprechend werden Summen oder Differenzen von drei oder mehr komplexen Zahlen berechnet. Im Sonderfall  $\underline{r}_2 = \underline{r}_1^*$  ergibt sich:

$$\underline{r}_1 + \underline{r}_1 = 2 \cdot a_1 \quad \text{bzw.} \quad \underline{r}_1 - \underline{r}_2 = j \cdot 2 \cdot b_1$$

Die Summe einer komplexen und ihrer konjugiert komplexen Zahl ist das Doppelte des Realteils, die Differenz das mit j multiplizierte Doppelte des Imaginärteils.

Damit lässt sich der Realteil einer komplexen Zahl  $\underline{r}$  folgendermaßen berechnen:

$$\text{Re}(\underline{r}) = \frac{1}{2} \cdot (\underline{r} + \underline{r}^*) \quad (40.12)$$

Entsprechend gilt für den Imaginärteil:

$$\text{Im}(\underline{r}) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot (\underline{r} - \underline{r}^*) = -j \cdot \frac{1}{2} \cdot (\underline{r} - \underline{r}^*) \quad (40.13)$$

Im Sonderfall  $\underline{r}_1 = e^{j\varphi}$  und  $\underline{r}_2 = \underline{r}_1^* = e^{-j\varphi}$  ergeben Addition bzw. Subtraktion:

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \cdot (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) \quad (40.14)$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}) \quad (40.15)$$

### 40.9.3 Multiplikation und Division

Diese Rechenarten führt man zweckmäßig in der P-Form durch. Das Produkt von zwei Zahlen  $\underline{r}_1$  und  $\underline{r}_2$  ist:

$$\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{j\varphi_2} \quad (40.16)$$

$$\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + j \cdot (a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad (40.17)$$

Wir betrachten nun den Fall  $\underline{r} = 1$ , der vor allem bei komplexen Zeigern von Bedeutung ist. In der Wechselstromtechnik bezeichnet man eine komplexe Zahl auch als Zeiger der Länge r. Der Ausdruck

$$\underline{r}_1 \cdot e^{j\varphi_2} \quad (40.18)$$

beschreibt einen Zeiger, der gegenüber  $\underline{r}_1$  um den Winkel  $\varphi_2$  gedreht ist (Bild 40.2). Deshalb wird ein Ausdruck von der Form  $e^{j\varphi_2}$  auch Dreher genannt. So ist z.B. für

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} :$$

$$\underline{r}_1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = \underline{r}_1 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{2} + j \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) = j \cdot \underline{r}_1$$

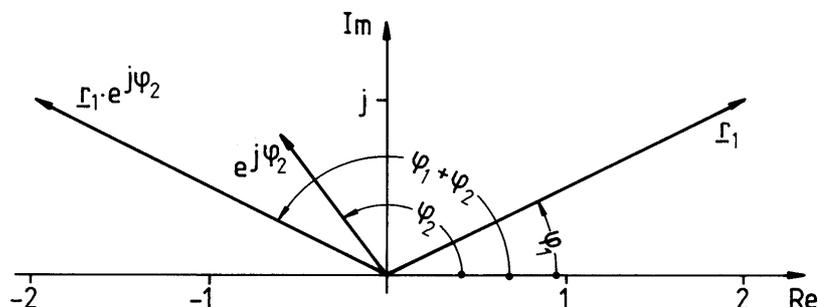


Bild 40.2: Drehung der komplexen Größe  $\underline{r}_1$  um den  $\varphi_2$ .

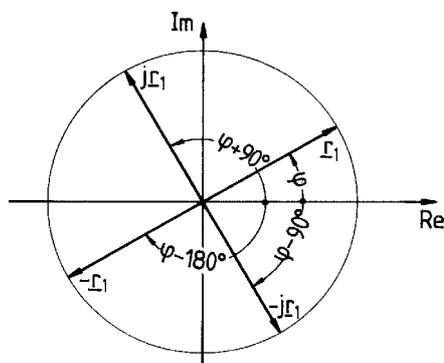


Bild 40.3: Multiplikation von  $\underline{r}_1$  mit  $\pm j$  bzw.  $\pm 1$ .

Eine Multiplikation mit dem Faktor  $\pm j$  bewirkt also eine Drehung des Zeigers um  $\pm 90^\circ$  im mathematisch positiven Sinn. Entsprechend bewirkt eine Multiplikation mit  $-1$  eine Drehung um  $180^\circ$  (Bild 40.3).

Das Produkt aus einer komplexen Zahl und ihrer konjugiert komplexen ist stets reell:

$$\underline{r} \cdot \underline{r}^* = (a + jb) \cdot (a - jb) = a^2 + b^2 = r \cdot e^{j\varphi} \cdot r \cdot e^{-j\varphi} = r^2 \quad (40.19)$$

Die Division von zwei komplexen Zahlen ergibt:

$$\frac{\underline{r}_1}{\underline{r}_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + j \cdot (b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (40.20)$$

#### 40.9.4 Potenzieren und Radizieren

Beim Potenzieren bzw. Radizieren verwendet man zweckmäßig die Polar-Form. Wir betrachten zunächst das Potenzieren, wobei wir den Exponenten der komplexen Zahl mit  $n$  bezeichnen. Wenn  $n$  eine ganze Zahl ist, erhält man eine einzige Potenz als Ergebnis:

$$\underline{r}^n = (r \cdot e^{j\varphi})^n = r^n \cdot e^{jn\varphi} \quad (40.21)$$

Beim Radizieren ist der Exponent eine gebrochene Zahl, deren Nenner wir im folgenden mit  $n$  bezeichnen. Man erhält beim Radizieren  $n$  Wurzeln. Mit  $k = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$  ergibt sich:

$$\underline{r}_n^k = (r \cdot e^{j\varphi})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{j\frac{\varphi+2k\pi}{n}} \quad (40.22)$$

Im Sonderfall  $n = 2$  spricht man beim Radizieren von der Bildung der Quadratwurzel; dabei erhält man zwei komplexe Zahlen als Ergebnis:

$$\underline{r}_1 = \sqrt{r} \cdot e^{j\frac{\varphi}{2}} \quad (40.23)$$

$$\underline{r}_2 = \sqrt{r} \cdot e^{j(\frac{\varphi}{2}+180^\circ)} \quad (40.24)$$

Wird bei einer Rechenoperation der Winkel  $\varphi > 180^\circ$ , so subtrahiert man zweckmäßig von  $\varphi$  den Winkel  $360^\circ$ ; entsprechend addiert man zweckmäßig zu einem Winkel  $\varphi < 180^\circ$  den Winkel  $360^\circ$ , um einen Winkel im Bereich  $-180^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$  zu erhalten.



## 30 Stichwortverzeichnis

### A

Asynchronmaschine ..... 1.1

### B

Bezugswert ..... 2.11

### D

Drehstromwicklung ..... 2.14

Dreieckschaltung ..... 9.1

### E

Energiedichte ..... 2.1

Erregerwicklung ..... 2.12

Ersatzluftspalt ..... 2.24

### F

Faktor a ..... 9.2

Felderregerkurve ..... 2.4

Fourierzerlegung ..... 2.9, 2.26

### G

Geometriefunktionen ..... 2.5

### H

Hüllenfluss ..... 2.8

### L

Luftspalt ..... 2.1

Luftspaltabschnitten ..... 2.3

Luftspaltinduktivitäten ..... 2.1

### N

Nutenwinkel ..... 2.20

Nutschrägung ..... 2.25

### O

Oberschicht ..... 2.18

Oberschwingungen ..... 2.12, 2.27

### P

Polpaarsymmetrie ..... 2.3

Positionswinkel ..... 2.13

### R

rechtsdrehendes Drehstromsystem ..... 2.21

Resolver ..... 2.12

### S

Schrägungswinkel ..... 2.25

Sehnungsfaktor ..... 2.20

Sternschaltung ..... 9.1

Strombelag ..... 2.3, 2.5

Strombelagsimpuls ..... 2.7

---

synchrone Drehzahl.....1.7  
Synchronmaschine .....1.1

**T**

Treppenfunktion .....2.14

**V**

verkettete Spannung .....9.3

**W**

Wechselinduktivität ..... 2.5

Windungszahl wirksame..... 2.24

**Z**

Zonenfaktor..... 2.20

Zweischichtwicklung ungesehnt..... 2.16

Zweispulenmodell..... 2.1

